

אלגברה ב' 1 - הרצאה 4 - 5.9.12

משפט האיזומורפיזם השלישי:

- I. יהיו $N \triangleleft G$ ונסמן $\bar{G} = G/N$. אם $N \leq H \leq G$, אזי $N \triangleleft H$ וכמו כן $\bar{H} \leq \bar{G}$.
- II. ההעתקה $H \rightarrow \bar{H}$ היא העתקה חח"ע מהמשפחה $\{H \mid N \leq H \leq G\}$ על משפחת כל החבורות החלקיות של \bar{G} .
- III. יתר על כן, העתקה זו שומרת (מקיימת):

- הכלה: $\bar{A}_1 \leq \bar{A}_2 \Leftrightarrow A_1 \leq A_2$
- חיתוכים: $\overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$
- נורמליות: $\bar{A}_1 \triangleleft \bar{A}_2 \Leftrightarrow A_1 \triangleleft A_2$
- מנות: אם $A_1 \triangleleft A_2$, אזי $\bar{A}_1 / \bar{A}_2 \cong A_2 / A_1$, כלומר $A_2/N / A_1/N \cong A_2/A_1$.

הוכחה: אוכיח את החלק העיקרי של המשפט, הלא הוא הטענה על שמירת המנות. שאר החלקים נובעים באופן טכני מהגדרת חבורת המנה.

נגדיר: $\varphi: A_2 \rightarrow A_2/N / A_1/N$ ע"י: $\varphi(a_2) = a_2N \cdot (A_1/N)$.

נראה ש- φ הומומורפיזם ונמצא את התמונה והגרעין שלה:

$$\varphi(a_2 a_2') = (a_2 a_2' N)(A_1/N) = (a_2 N \cdot a_2' N)(A_1/N) = (a_2 N \cdot A_1/N) \cdot (a_2' N \cdot A_1/N) = \varphi(a_2) \varphi(a_2')$$

$$\text{Im } \varphi = A_2/N / A_1/N$$

$$\begin{aligned} a_2 \in \ker \varphi &\Leftrightarrow \varphi(a_2) = a_2N(A_1/N) = A_1/N \\ &\Leftrightarrow a_2N \in A_1/N = \{a_1N \mid a_1 \in A_1\} \\ &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1 : a_2N = a_1N \Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1 : a_1 a_2^{-1} \in N \leq A_1 \\ &\Leftrightarrow a_2 \in A_1 \Leftrightarrow A_1 = \ker \varphi \end{aligned}$$

ולכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, מתקיים $A_2/N / A_1/N \cong A_2/A_1$.

תרגיל: יהיו $N \triangleleft G$, $H_1 \triangleleft H \leq G$, אז $H_1N \triangleleft HN$.

הוכחה: מתקיים $N \leq H_1N \leq HN \leq G$. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי, די להוכיח

$$H_1N/N \triangleleft HN/N$$

איבר ב- HN/N הוא מהצורה $hnN = hN$, כאשר $h \in H$, $n \in N$, ובאותו אופן איבר ב-

H_1N/N הוא מהצורה h_1N , כאשר $h_1 \in N$. לכן: $(hN)^{-1}(h_1N)(hN) = h^{-1}h_1hN \in H_1N/N$.

הלמה של צננהאוס (Zassenhaus) (למת הפרפר): יהיו $A_1 \triangleleft A \leq G$, $B_1 \triangleleft B \leq G$, אזי:

$$I. A_1(A \cap B_1), A_1(A \cap B) \leq G$$

$$II. B_1(A_1 \cap B) \triangleleft B_1(A \cap B), \text{ ובאופן סימטרי } A_1(A \cap B_1) \triangleleft A_1(A \cap B)$$

$$III. B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A_1(A \cap B)/A_1(A \cap B_1)$$

הוכחה:

$$I. A_1 \triangleleft A, A \cap B_1 \leq A \cap B \leq A, \text{ לכן (טענה מהרצאה 3 - } H \leq G, N \triangleleft G \text{, אזי}$$

$$A_1(A \cap B_1), A_1(A \cap B) \leq G \text{ מתקיים (} HN \leq G$$

$$II. B_1 \cap (A \cap B) \triangleleft A \cap B \triangleleft B_1 \triangleleft B \text{ (שוב, טענה מההרצאה הקודמת, } N_1, N_2 \triangleleft G \text{)}$$

$$\text{כלומר, } (N_1 \cap N_2 \triangleleft G \text{, ונקבל בעזרת התרגיל האחרון}$$

$$A_1(A \cap B_1) \triangleleft A_1(A \cap B)$$

$$III. A_1 \cap B \leq A \cap B, \text{ ולכן } B_1(A \cap B) = B_1(A_1 \cap B)(A \cap B)$$

$$\text{נראה } [B_1(A_1 \cap B)] \cap (A \cap B) = (A \cap B_1)(A_1 \cap B)$$

$$\supseteq \text{ אם } x \in (A \cap B_1)(A_1 \cap B), \text{ אז } x \in B_1(A_1 \cap B), x \in A \cap B$$

$$\subseteq \text{ יהיו } b \in B_1, c \in A_1 \cap B, bc \in A \cap B \text{ בבירור. לכן, } bc, c \in A, \text{ ומסגירות לפעולה}$$

$$\text{ולחפכי של } A \text{ גם } b \in A. \text{ קיבלנו } b \in A \cap B_1$$

לפי משפט האיזומורפיזם השני מתקיים:

$$[B_1(A_1 \cap B)](A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A \cap B/A \cap B \cap [B_1(A_1 \cap B)]$$

נציב את השוויונות שקיבלנו:

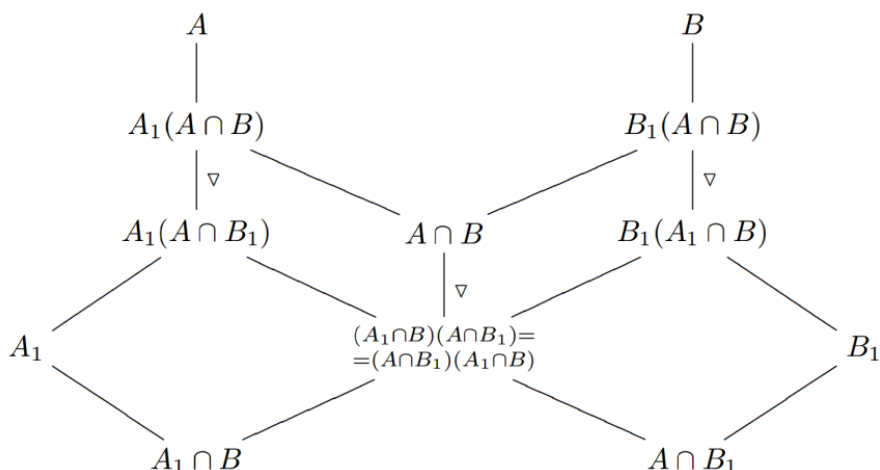
$$B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A \cap B/(A \cap B_1)(A_1 \cap B)$$

משיקולי סימטריה (נחליף את A ו- B בהוכחה) נקבל:

$$A_1(B \cap A)/A_1(B \cap A) \cong B \cap A/(B \cap A_1)(B_1 \cap A)$$

מטרגנוטיביות יחס האיזומורפיה: $B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A_1(A \cap B)/A_1(A \cap B_1)$.

להלן סכמה (בצורת פרפר! אם אתה לא מצליח לראות את הפרפר סימן שעשית נכון שבחרת ללמוד מתמטיקה ולא אומנות) הממחישה את היחסים בין החבורות השונות בהוכחה (לקוחה מתוך הרשימות של פרופסור דן הרן):



תרגיל: תהא G חבורה, נסמן $A = G \times G$ (מכפלה קרטזית). נסמן: $G_1 = G \times \{1\}$, $G_2 = G \times \{2\}$.

I. הוכח: $G_1 \cong G_2 \cong G$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi: G \rightarrow G_1$ על ידי $\varphi(g) = (g, 1)$. קל לבדוק שזהו איזומורפיזם. באופן דומה נוכיח עבור G_2 .

II. תהא $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$ (תת-חבורת האלכסון). הוכח: $\Delta \cong G$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi: G \rightarrow \Delta$ על ידי $\varphi(g) = (g, g)$.

$$\varphi(gh) = (gh, gh) = (g, g)(h, h) = \varphi(g)\varphi(h)$$

ולכן φ הומומורפיזם. ברור ש- φ על. אם $g \in \ker \varphi$, אזי $(g, g) = (1, 1)$ ולכן $g = 1$, ולכן $\ker \varphi = \{1\}$, כלומר φ איזומורפיזם.

III. האם $\Delta, G_2, G_1 \triangleleft G \times G$?

נבדוק האם $G_1 \triangleleft G \times G$. ניקח $(g, 1) \in G_1$, ויהי $(g_1, g_2) \in G \times G$.

$$(g_1, g_2)(g, 1)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1 \cdot g, g_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 \cdot g \cdot g_1^{-1}, 1) \in G_1$$

כנ"ל לגבי G_2 .

טענה: Δ נורמלית ב- $G \Leftrightarrow G$ אבליה.

הוכחה: \Rightarrow : נניח G אבליה, לכן $G \times G$ אבליה, ולכן כל תת חבורה שלה נורמלית, ובפרט Δ .

\Rightarrow : נניח $\Delta \triangleleft G \times G$. יהיו $g_1, g_2 \in G$. מתקיים:

$$(g_1, g_2)(g_1, g_1)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1 \cdot g_1 \cdot g_1^{-1}, g_2 \cdot g_1 \cdot g_2^{-1}) = (g_1, g_2 \cdot g_1 \cdot g_2^{-1}) \in \Delta \\ \Rightarrow g_1 = g_2 \cdot g_1 \cdot g_2^{-1} \Rightarrow g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$$

לכן $G \times G$ אבליה.

הגדרה: אם G חבורה, $g, h \in G$ אז האיבר $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ נקרא הקומוטטור של g, h .

תרגיל: g, h מתחלפים $\Leftrightarrow [g, h] = 1$.

הוכחה: g, h מתחלפים $\Leftrightarrow gh = hg \Leftrightarrow [g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = 1$.

הגדרה: אם G חבורה, אזי תת חבורת הקומוטטור של G , שנסמנה G' , היא התת חבורה הנוצרת על ידי כל הקומוטטורים.

טענה: $G' \triangleleft G$.

הוכחה: אבחנה I: $[g, h]^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g]$, ולכן G' היא אוסף כל המכפלות של כל הקומוטטורים.

אבחנה II: $a[g, h]a^{-1} = aghg^{-1}h^{-1}a^{-1} = (aga^{-1})(aha^{-1}) = [aga^{-1}, aha^{-1}]$.

ניקח איבר כללי של G' , $[g_1, h_1] \cdot [g_2, h_2] \cdot \dots \cdot [g_k, h_k]$, וניקח $a \in G$. אזי:

$$a[g_1, h_1] \cdot [g_2, h_2] \cdot \dots \cdot [g_k, h_k] a^{-1} = a[g_1, h_1] a^{-1} \cdot a[g_2, h_2] a^{-1} \cdot \dots \cdot a[g_k, h_k] a^{-1} \\ = [ag_1 a^{-1}, ah_1 a^{-1}] \cdot [ag_2 a^{-1}, ah_2 a^{-1}] \cdot \dots \cdot [ag_k a^{-1}, ah_k a^{-1}] \in G'$$

כי זו מכפלה של קומוטטורים. \square

טענה: G/N אבליה אם $G' \leq N$, עבור $N \triangleleft G$ (ובפרט, G/G' תמיד אבליה).

הערה: G אבליה $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

הוכחה: \Rightarrow : נניח $G' \leq N$. ניקח $g_1 N, g_2 N \in G/N$.

$$[g_1, g_2] \in G' \leq N \Rightarrow [g_1, g_2] N = N \Rightarrow g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} N = N \\ \Rightarrow (g_1 N)(g_2 N)(g_1^{-1} N)(g_2^{-1} N) = N \\ \Rightarrow (g_1 N)(g_2 N) = (g_2 N)(g_1 N)$$

\Leftarrow : נניח ש- $[g, h]$ קומוטטור.

$$gNhN = hNgN \Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in N \Rightarrow [g, h] \in N$$

ומסגירות של G' לפעולה נקבל $G' \leq N$. \square

תרגיל: נניח $M, N \triangleleft G$, $M \cap N = \{e\}$. צ"ל: עבור $m \in M, n \in N$ מתקיים $mn = nm$.

פתרון: $N \ni m \underbrace{(nm^{-1}n^{-1})}_{\in M \triangleleft G} = [m, n] = \underbrace{(mnm^{-1})}_{\in N \triangleleft G} n^{-1} \in N$ (סימני השייכות נובעים מסגירות לפעולה ונורמליות). כלומר, מתקיים $[m, n] \in M \cap N$, לכן $[m, n] = e$, כלומר $mn = nm$.

טענה: נניח ש- $H \leq G$, סופית, H היא היחידה מסדרה בתוך G , אזי $H \triangleleft G$.

הוכחה: ניקח $g \in G$, ונתבונן בחבורה gHg^{-1} . מתקיים $gHg^{-1} \leq G$, ומשום שפעולת ההצמדה היא העתקה חח"ע ועל, מתקיים $|H| = |gHg^{-1}|$. מיחידות הסדר של H מתקיים $H = gHg^{-1}$, כלומר $H \triangleleft G$ נורמלית ב- G . \square

הגדרה: אם G חבורה, נסמן ב- $Z(G)$ את המרכז של G : $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G: hg = gh\}$. טענה: $Z(G) \triangleleft G$.

הוכחה: יהיו $g \in Z(G), h \in G$. מתקיים $ghh^{-1} = ghg^{-1} = g$, לכן $Z(G) \triangleleft G$. \square

הערה: ישנן מקומות בהם מסמנים את המרכז ב- $C(G)$.

תרגיל: $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ אבליה $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

הגדרה: תהא G חבורה. הנורמליזטור (המשמר) של g ב- G מוגדר:

$$N_G(g) = \{h \in G \mid hgh^{-1} = g\}$$

טענה: $N_G(g) \leq G$.

הוכחה: קל לראות ש- $e \in N_G(g)$. יהיו $a, b \in N_G(g)$.

סגירות: $ab \in N_G(g) \Leftarrow abg(ab)^{-1} = abgb^{-1}a^{-1} = aga^{-1} = g$

פכי: $\square a^{-1} \in N_G(g) \Leftarrow a^{-1}g(a^{-1})^{-1} = a^{-1}ga = a^{-1}(aga^{-1})a = g$

תרגיל: $a \in Z(G) \Leftrightarrow N_G(a) = G$.

הוכחה: $a \in Z(G) \Leftrightarrow \forall h \in G: ha = ah \Leftrightarrow \forall h \in G: hah^{-1} = a \Leftrightarrow N_G(a) = G$

הגדרה: אם G חבורה, נסמן ב- $Aut(G)$ את אוסף כל האוטומורפיזמים של G . זוהי חבורה ביחס להרכבה.

דוגמה: יהי $a \in G$. ההעתקה $\varphi_a: g \mapsto aga^{-1}$ הוא אוטומורפיזם הנקרא אוטומורפיזם פנימי. קל לראות ש- φ_a חד-חד ערכי ועל. נראה שהוא אכן הומומורפיזם:

$$\varphi_a(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \varphi_a(g)\varphi_a(h)$$

תרגיל: ההעתקה $\xi: G \rightarrow Aut(G)$ המעתיקה את a ל- φ_a חד-חד ערכית ועל.

הוכחה: $\xi(ab) = \varphi_{ab}$, $\xi(a) = \varphi_a$, $\xi(b) = \varphi_b$. מתקיים:

$$\xi(ab)(g) = \varphi_{ab}(g) = abgb^{-1}a^{-1} = \varphi_a(bgb^{-1}) = \xi(a)(\varphi_b(g)) = \xi(a)(\xi(b)(g)) = (\xi(a) \circ \xi(b))(g)$$

הגדרה: להצמיד את g ב- a משמעו לחשב את $g^a := aga^{-1}$.

הגדרה: תהא G חבורה ו- X קבוצה. פעולה משמאל של G על X היא העתקה $\pi: G \times X \rightarrow X$ המקיימת:

- $\pi(g_1g_2, x) = \pi(g_1, \pi(g_2, x))$
- $\pi(e, x) = x$ (הערה: e הוא לאו דווקא האיבר היחיד הפועל טריוויאלית)

סימון: בדרך כלל נסמן g^*x במקום $\pi(g, x)$.

דוגמאות:

I. $g^*v := g \cdot v: \mathbb{R}^n$ פועלת על $GL_n(\mathbb{R})$

II. $f^*x = f(x)$ פועלת על $S(X)$

III. חבורה G הפועלת על עצמה על ידי הצמדה: $g^*x = gxg^{-1}$

IV. כל חבורה פועלת על אוסף תת החבורות שלה על ידי הצמדה: $g^*H = gHg^{-1}$

V. הפעולה הטריוויאלית של חבורה על X : $g^*x = x$

הגדרה: אם G פועלת על X אז היחס על X : $x_1 \sim x_2$ - אם יש $g \in G$ כך ש- $x_1 = g * x_2$ הוא יחס שקילות על X . מחלקות השקילות של יחס זה נקראות מסלולי- G (G -orbits).
 נראה שזהו אכן יחס שקילות:
 רפלקסיביות: $x \sim x \leftarrow e * x = x$.
 סימטריות: אם $x \sim y$, אז יש g כך ש- $g * x = y$, אבל אז $g^{-1} * y = x$, שכן:

$$x = e * x = (g^{-1}g) * x = g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * y$$

ולכן $y \sim x$.

טרנזיטיביות: אם $x \sim y$, $y \sim z$, אז קיימים $g, h \in G$ כך ש- $g * x = y$, $h * y = z$, ולכן:

$$(hg) * x = h * (g * x) = h * y = z$$

כלומר $x \sim z$.

הערה: $X = \bigcup_{i \in I} \{g * x_i \mid g \in G\}$ כאשר $\{x_i\}_{i \in I}$ זו מערכת מייצגים של מסלולי G (קרי, מחלקות השקילות).