

## אלגברה ב' 1 - הרצאה 7 - 19.9.12

תרגיל: כמה חבורות 5-סילוב יש ב- $S_5$ ? לפי משפטי סילוב מתקיים:

$$\begin{aligned} |S_5| &= 120 = 5 \cdot 24 \\ \begin{cases} n_5 \equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 | 24 \Rightarrow n_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \end{cases} \\ &\Downarrow \\ n_5 &\in \{1, 6\} \end{aligned}$$

אם  $n_5 = 1$ , אז יש ב- $S_5$  בדיוק חבורה אחת מסדר 5, וכל איבר שהסדר שלו הוא 5 שייך לחבורה  $H$ . בחבורה  $H$  יש בדיוק  $5-1=4$  איברים מסדר 5, ולכן ב- $S_5$  יש בדיוק 4 איברים מסדר 5. אולם, ב- $S_5$  כל מעגל מאורך 5 הוא מסדר 5, ויש  $(5-1)! = 24$  מעגלים כאלו, וזו סתירה לגודל  $H$ , לכן  $n_5 = 6$ .

תרגיל: כמה חבורות 3-סילוב יש ב- $S_4$ ?

$$\begin{aligned} |S_4| &= 24 = 3 \cdot 8 \\ \begin{cases} n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 | 8 \Rightarrow n_3 \in \{1, 2, 4, 8\} \end{cases} \\ &\Downarrow \\ n_3 &\in \{1, 4\} \end{aligned}$$

נניח  $n_3 = 4$ , אזי יש 4 חבורות מסדר 3 ב- $S_4$ , וכל חבורה כזו תורמת 3 איברים מסדר 3 (כל שתי חבורות כאלו או שוות או בעלות חיתוך טריוויאל). לפיכך, ב- $S_4$  יש לפחות 9 איברים מסדר 3.

אולם, מספר האיברים מסדר 3 ב- $S_4$  זהו מספר המעגלים מגודל 3, שהוא  $\binom{4}{3} \cdot (3-1)! = 8$ . סתירה. לכן  $n_3 = 1$ .

למה: תהא  $G$  חבורה סופית,  $N \triangleleft G$ ,  $P$  חבורת  $p$ -סילוב. אזי:

I.  $P \cap N$  היא חבורת  $p$ -סילוב ב- $N$ .

II.  $PN/N$  היא  $p$ -סילוב ב- $G/N$ .

הוכחה: מתקיים  $P \leq PN \leq G$ . לפי משפט לגראנז'  $[G:PN][PN:P] = [G:P]$ .  $[G:P]$  זר ל- $p$ , ולכן  $[PN:P]$ ,  $[G:PN]$  זרים ל- $p$ . לפי משפט האיזומורפיזם השני,  $PN/N \cong P/P \cap N$ ,

ובפרט  $\frac{|PN/N|}{|N|} = \frac{|P|}{|P \cap N|}$ . בנוסף,  $P \cap N \leq P$ , לכן  $P \cap N$  זו חבורת- $p$ . מתקיים:

$$[N : P \cap N] = \frac{|N|}{|P \cap N|} = \frac{|PN|}{|P|} = [PN : P]$$

ולכן  $[N : P \cap N]$  זר ל- $p$ , ולכן  $P \cap N$  זו תת-חבורת  $p$ -סילוב של  $N$ .  
 $P/P \cap N$  זו מנה של חבורת- $p$ , ולכן היא חבורת- $p$ , ולכן גם  $PN/N$  זו חבורת- $p$ . לפי משפט  
האיזומורפיזם השלישי  $[G/N : PN/N] = [G : PN]$ , ולכן גם  $[G/N : PN/N]$  זר ל- $p$ , כלומר  
 $PN/N$  זו תת-חבורה  $p$ -סילוב של  $G/N$ .  $\square$

תרגיל: תהא  $G$  חבורה מסדר  $pq$ , כאשר  $q < p$  ראשוניים. אזי:  
א.  $G$  פתירה.

ב. אם  $q \nmid p-1$ ,  $G$  ציקלית.

הוכחה: א.  $n_p \in \{1, q\} \Leftarrow n_p \mid q, n_p \equiv 1 \pmod{p}$ . אם  $n_p = q$  אזי  $q-1 \equiv 0 \pmod{p}$ , כלומר  
 $p \mid q-1$ , אבל  $p > q$ , סתירה. לכן  $n_p = 1$ . מכאן, יש תת-חבורה יחידה  $P$  מסדר  $p$ , ולכן  
 $P \triangleleft G$ .  $|P| = p$  מסדר ראשוני, לכן ציקלית, בפרט אבלית, ובפרט פתירה.  $G/P$  מסדר  $q$ , ולכן  
גם היא ציקלית  $\leftarrow$  אבלית  $\leftarrow$  פתירה. הוכחנו שאם  $P$  ו- $G/P$  פתירות אז גם  $G$  פתירה, ולכן  
סיימנו.

ב.  $n_q \in \{1, p\}, n_q \equiv 1 \pmod{q}$ . אם  $n_q = p$  אזי  $p-1 \equiv 0 \pmod{q}$ , כלומר  $q \mid p-1$  בסתירה להנחה. לכן  
 $n_q = 1$ , כלומר קיימת תת-חבורה יחידה  $Q \triangleleft G$  מסדר  $q$ . מתקיים  $P \cap Q = \{e\}$ ,  $|P||Q| = |G|$ ,  
 $P, Q \triangleleft G$ , ולפיכך  $G \cong P \times Q \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_{pq}$  ולכן  $G$  ציקלית.  $\square$

תרגיל: כל חבורה מסדר 90 אינה פשוטה.

$$\text{פתרון: } 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$n_5 \in \{1, 6\} \Leftarrow n_5 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, n_5 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n_3 \in \{1, 10\} \Leftarrow n_3 \in \{1, 2, 5, 10\}, n_3 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$n_2 \in \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}, n_2 \equiv 1 \pmod{2}$$

נניח בשלילה שקיימת חבורה פשוטה  $G$  מסדר 90. אם  $n_5 = 1$  או  $n_3 = 1$ , אזי בהכרח קיימת  
תת-חבורה נורמלית ל- $G$ . לכן נניח  $n_3 = 10, n_5 = 6$ . יש 6 חבורות מסדר 5, בכל אחת מהן יש  
בדיוק 4 איברים מסדר 5, וכל שתי חבורות כאלו הן או שוות או בעלות חיתוך טריוויאלי. לפיכך,  
בחבורה יש בסה"כ  $6 \cdot 4 = 24$  איברים מסדר 5. בנוסף, לחבורה הנתונה ישנן 10 תת-חבורות  
מסדר 9. נניח שחיתוך כל זוג מתוך חבורות אלו טריוויאלי, ואז היו בחבורות אלו  $10 \cdot 8 = 80$   
איברים מסדר 3 או 9, כלומר בחבורה יש לכל הפחות  $1 + 24 + 80 = 105$  איברים, בסתירה לכן  
שהחבורה מסדר 90. לפיכך, קיימות 2 תת-חבורות 3-סילוב  $P_1, P_2$  כך ש- $|P_1 \cap P_2| = 3$ . הן  
חבורות מסדר  $9 = 3^2$ , והראנו שכל חבורה מסדר ריבוע של ראשוני היא אבלית, לכן הן אבליות,  
כלומר מתקיים  $P_1 \cap P_2 \triangleleft P_1, P_2$ . מהגדרת הנורמליות מתקיים  $P_1 \cap P_2 \triangleleft \langle P_1, P_2 \rangle$ . מתקיים  
 $[G : \langle P_1, P_2 \rangle] \in \{1, 2, 5, 10\}$ , ולכן  $9 \mid [G : \langle P_1, P_2 \rangle]$ .

אם  $[G: \langle P_1, P_2 \rangle] = 1$ , אזי  $G = \langle P_1, P_2 \rangle$  וסיימנו. אם  $[G: \langle P_1, P_2 \rangle] = 10$ , אזי  $|\langle P_1, P_2 \rangle| = 9$ , ולכן  $P_1 = \langle P_1, P_2 \rangle = P_2$ , סתירה. אם  $[G: \langle P_1, P_2 \rangle] = 2$  אז סיימנו, כי תת-חבורה מאינדקס 2 היא תת-חבורה נורמלית. אם  $[G: \langle P_1, P_2 \rangle] = 5$  אז  $5! \nmid 90$  מכילה תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית של החבורה  $G$ .

## רשימת טריקים:

- I. משפטי סילוב – לספור חבורות  $p$ -סילוב. אם  $n_p = 1$  אז יש תת-חבורה נורמלית.
- II. לספור איברים – שיקולים קומבינטוריים.
- III. עבור חבורות שהן מכפלה של מס' קטן של ראשוניים:
  - א. חבורה מסדר  $p$  היא ציקלית.
  - ב. חבורה מסדר  $p^2$  היא אבלית.
  - ג. חבורה מסדר  $pq$  כאשר  $q > p$ ,  $p \nmid q-1$  היא ציקלית. (בד"כ נפעיל אינפורמציה זו על חבורות מנה).
- IV. תת-חבורת הקומוטטור: אם  $N \triangleleft G$  אזי  $G/N$  אבלית  $\Leftrightarrow G' \leq N$ .
- V. לזהות איזושהי פעולה (למשל, אם  $[G: H] = m$ ,  $|G| = n \nmid m!$ , אזי  $H$  מכילה תת-חבורה לא טריוויאלית של  $G$ ).
- VI. כל מיני טענות ספורדיות:
  - א. חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית.
  - ב. כל חבורת- $p$  בעלת מרכז לא-טריוויאלי.

תרגיל: הוכח שחבורה מסדר 255 היא אבלית.

פתרון: תהא  $G$  חבורה מסדר  $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ .

$$\begin{aligned} n_{17} \in \{1, 3, 5, 15\}, n_{17} \equiv 1(17) &\Rightarrow n_{17} = 1 \\ n_5 \in \{1, 3, 17, 51\}, n_5 \equiv 1(5) &\Rightarrow n_5 \in \{1, 51\} \\ n_3 \in \{1, 5, 17, 85\}, n_3 \equiv 1(3) &\Rightarrow n_3 \in \{1, 85\} \end{aligned}$$

לכן יש ל- $G$  יש תת-חבורה נורמלית מסדר 17, נסמנה  $P_{17}$ . נניח  $n_5 = 51$ ,  $n_3 = 85$ . כל תת-חבורה מסדר 5 תורמת 4 איברים מסדר 5, וכל חבורה מסדר 3 תורמת 2 איברים מסדר 3. לפיכך ב- $G$  יש לכל הפחות  $374 = 51 \cdot 4 + 85 \cdot 2$  איברים, בסתירה לסדר של  $G$ . לכן, או  $n_3 = 1$  או  $n_5 = 1$ . לכן, או שקיימת תת-חבורה נורמלית מסדר 3, ונסמנה  $P_3$ , או תת-חבורה נורמלית מסדר 5, נסמנה  $P_5$ . בהנחת קיום  $P_3, P_5$ :

$$|G/P_{17}| = 15 = 3 \cdot 5, |G/P_5| = 51 = 3 \cdot 17, |G/P_3| = 85 = 5 \cdot 17$$

ולכן  $G/P_{17}, G/P_3, G/P_5$  ציקליות, ובפרט אבליות.  
 $G/P_{17}$  אבלית, ולכן  $G' \leq P_{17}$ . אם  $G' \leq P_3$  קיימת, אזי  $G/P_3$  אבלית ולכן  $G' \leq P_3$ . אחרת,  $P_5$  קיימת,  $G/P_5$  אבלית ולכן  $G' \leq P_5$ . לפיכך,  $G' \leq P_5 \cap P_{17}$  או  $G' \leq P_3 \cap P_{17}$ , ובכל אחד מהמקרים החיתוך טריוויאלי, לכן  $G' = \{e\}$ , כלומר  $G$  אבלית.

תרגיל: הוכח כי כל חבורה מסדר 255 היא ציקלית, כלומר איזומורפית לחבורה  $\mathbb{Z}_{255}$ .

פתרון: תהא  $G$  חבורה מסדר 255. יהיו  $P_{17}, P_5, P_3$  חבורות 3-סילוב, 5-סילוב ו-17-סילוב של  $G$  בהתאמה.  $G$  מסדר 255, ולכן היא אבלית (התרגיל הקודם). לפיכך,  $P_{17}, P_3, P_5 \triangleleft G$ . חיתוך כל שתיים מתוך חבורות אלו טריוויאלי, ומכפלת הסדרים שלהם היא 255. לפיכך,  
 $G \cong P_3 \times P_5 \times P_{17} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \cong \mathbb{Z}_{255}$ .

תרגיל: תהי  $G$  מסדר 1225. הוכח ש- $G$  אבלית.

פתרון:

$$|G| = 5^2 \cdot 7^2$$

$$n_7 \in \{1, 5, 25\}, n_7 \equiv 1(7) \Rightarrow n_7 = 1$$

$$n_5 \in \{1, 7, 49\}, n_5 \equiv 1(5) \Rightarrow n_5 = 1$$

יש חבורות נורמליות  $P, Q$  מסדרים 25 ו-49 בהתאמה. מכיוון שסדרים אלו הם ריבועי ראשוניים,  $P, Q$  אבליות, ומתקיים:

$$P, Q \triangleleft G \quad \text{I}$$

$$P \cap Q = \{e\} \quad \text{II}$$

$$|P||Q| = |G| \quad \text{III}$$

ולכן  $G$  זו המכפלה הישרה של  $P, Q$ , ומשום שהן אבליות, גם  $G$  אבלית.

תרגיל: כל חבורה מסדר 12 פתירה.

פתרון: תהא  $G$  חבורה מסדר  $12 = 2^2 \cdot 3$ .

$$n_3 \in \{1, 2, 4\}, n_3 \equiv 1(3) \Rightarrow n_3 \in \{1, 4\}$$

$$n_2 \in \{1, 3\}$$

אם  $n_3 = 4, n_2 = 3$  אז יש ב- $G$  8 איברים מסדר 3 ו-4 איברים מסדר 2 או 4, כלומר ב- $G$  יש לפחות 17 איברים, בסתירה לסדר  $G$ . לכן, או שקיימת  $P \triangleleft G$  מסדר 3, או שקיימת  $Q \triangleleft G$  מסדר 4.

במקרה הראשון,  $|G/P| = 4$ , לכן  $G/P$  אבלית, ולכן פתירה, ומכיוון ש- $P$  מסדר 3 (ולכן גם היא אבלית ופתירה), גם  $G$  פתירה.

במקרה השני,  $Q$  פתירה (כי סדרה 4, לכן היא אבלית ובפרט פתירה),  $|G/Q| = 3$ , ולכן  $G/Q$  ציקלית ובפרט פתירה, ולכן  $G$  פתירה.

תרגיל: הוכח שכל חבורה מסדר  $2^m \cdot 3$  פתירה, לכל  $m \geq 0$ .

פתרון: תהא חבורה  $G$  מסדר  $2^m \cdot 3$ . עבור  $m = 0$  זו חבורה ציקלית, ולכן בפרט פתירה. עבור  $m = 1$  זו חבורה מסדר 6, וההוכחה שחבורה זו פתירה דומה לתרגיל הקודם (ספירת איברים). גם עבור  $m = 2$  הוכחנו כבר. נוכיח באינדוקציה על  $m \geq 3$ .

תהא  $P$  חבורה 2-סילוב של  $G$ ,  $|P| = 2^m$ .  $[G : P] = 3$ , אבל  $3 \nmid 2^m$  ( $m > 2$ ), לכן  $P$  מכילה תת-חבורה  $N \triangleleft G$ . נסמן:  $|N| = 2^k$ ,  $1 \leq k \leq m$ . חבורת-2, ולכן היא פתירה.  $[G : N] = 2^{m-k} \cdot 3$ , ולפי הנחת האינדוקציה גם  $G/N$  פתירה, ולפיכך  $G$  פתירה.

תרגיל: הוכח שכל חבורה מסדר  $2^m \cdot 3^k$  פתירה, לכל  $m, k \geq 0$ .

פתרון: יש בעייתיות בפתרון שראינו בכיתה. אולי אוסיף פתרון לתרגיל זה מאוחר יותר (הערה): הטענה נכונה לכל  $p, q$  ראשוניים, ולא רק ל-2,3. תוצאה זו ידועה בתור משפט ברנסייד, אבל ההוכחה למשפט דורשת ידע בתורת ההצגות שחורג ממסגרת קורס זה.

תרגיל: תהי  $G$  חבורה,  $P \leq G$  תת-חבורה  $p$ -סילוב. הוכח:  $N(N(P)) = N(P)$ .

הוכחה: מהגדרת הנורמליזטור מתקיים  $N(P) \leq N(N(P))$ . נראה את הכיוון השני. יהי  $g \in N(N(P))$ , ולכן  $gN(P)g^{-1} = N(P)$ . מספיק להראות  $gPg^{-1} = P$ .  $P \leq N(P)$ , לכן  $gPg^{-1} \leq gN(P)g^{-1} = N(P)$ . חבורת  $p$ -סילוב ב- $G$ , ולכן היא חבורת  $p$ -סילוב גם ב- $N(P)$ , ולכן גם  $gPg^{-1}$  חבורת  $p$ -סילוב ב- $N(P)$ . לפי המשפט השני של סילוב, תת-חבורות  $p$ -סילוב של אותה חבורה צמודות זו לזו, ולכן קיים  $h \in N(P)$  עבורו  $gPg^{-1} = hPh^{-1}$ . אולם,  $P \triangleleft N(P)$ , ולכן  $hPh^{-1} = P$ , כלומר  $gPg^{-1} = P$ , ולכן  $g \in N(P)$ .