

אלגברה ב' 1 - הרצאה 8 - 20.9.12

הגדרה: תהי A חבורה אבלית (חיבורית).

- I. החבורה $A^t := \{a \in A \mid o(a) > \infty\}$ נקראת תת-חבורת הפיתול של A .
 II. אם $A = A^t$ נאמר ש- A חבורת פיתול (Torison).
 III. A נקראת חסרת פיתול אם $A^t = \{0\}$.

למה: א. $A^t \leq A$

ב. A/A^t חסרת פיתול.

ג. אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.

הוכחה: א. ברור ש- $0 \in A^t$. יהיו $a, b \in A^t$, אז יש $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $ma = nb = 0$. לפיכך,

$$mn(a+b) = mna + mnb = n(ma) + m(nb) = 0$$

לכן $a+b \in A^t$. כמו כן $m(-a) = -(ma) = 0$, לכן $-a \in A^t$.

ב. צריך להוכיח לכל $a \in A$: אם $a + A^t$ מסדר $n < \infty$ ב- A/A^t אז $a + A^t = A^t$, כלומר

$a \in A^t$. ואכן, $n(a + A^t) = A^t$, לכן $na \in A^t$, כלומר קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $m(na) = 0$, ולכן

$$a \in A^t$$

ג. באינדוקציה על מספר היוצרים המינימלי של A . אם $A = \langle a \rangle$ אז קיים n כך ש- $na = 0$, אם

ניקח n מינימלי כזה יתקיים $A \cong \mathbb{Z}_n$, כלומר A סופית. נניח $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. לפי הנחת

האינדוקציה החבורה $B = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ סופית, ומאבליות A מתקיים $A = B + \langle a_n \rangle$. לכן,

ממשפט האיזומורפיזם השני מתקיים $A/B \cong \langle a_n \rangle / B \cap \langle a_n \rangle$, ולכן $[A:B] \leq |\langle a_n \rangle| < \infty$.

$$\square \quad |A| = |B| \cdot [A:B] < \infty$$

דוגמה: חבורת פיתול שאינה סופית - $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}_0} \cong \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}_2\} \cong \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}_0}$ עם חיבור איבר-איבר.

הסדר של חבורה זו הוא \aleph_1 , וכל איבר בחבורה הוא מסדר 2.

דוגמה: נתבונן ב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q + \mathbb{Z} \mid q \in \mathbb{Q}\}$. אם $\frac{m}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, אז $n, m \in \mathbb{Z}$, או

$$n\left(\frac{m}{n} + \mathbb{Z}\right) = m + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

זו לא חבורה סופית כי כל האיברים $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ שונים זה מזה עבור

$n \geq 1$, אך זו חבורת פיתול.

דוגמה: החבורה $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ זו חבורה "מעורבת". האיבר $(1, 0)$ מסדר סופי, אך האיבר $(0, 1)$

מסדר אינסופי.

הגדרה: תהא חבורה F אבלית. קבוצה של איברים $v_1, \dots, v_n \in F$ נקראת בסיס אם לכל $v \in F$

יש הצגה יחידה $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ כאשר $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ לכל i . חבורה אבלית נקראת חופשית אם יש לה

בסיס.

משפט: תהא F חבורה אבלית חופשית עם בסיס v_1, \dots, v_n , ותהא A חבורה אבלית,

$a_1, \dots, a_n \in A$ קיים הומומורפיזם יחיד $\varphi: F \rightarrow A$ כך ש- $\varphi(v_i) = a_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$. בפרט, אם

$$A \cong F/\ker \varphi, A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

הוכחה: נגדיר $\varphi: F \rightarrow A$ באופן הבא: לכל $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ יתקיים:

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

לפי הגדרת הבסיס, זוהי הגדרה טובה. ברור שמדובר בהומומורפיזם יחיד המקיים את התכונות הרצויות. אם $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, אזי $\text{Im } \varphi = A$, ולכן לפי משפט ההומומורפיזם $A \cong F/\ker \varphi$.

למה: תהא F חבורה אבלית, $v_1, \dots, v_n \in F$. בסיס אם י"ם

$$F = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle \quad \bullet$$

$$\forall 1 \leq i \leq n: \langle v_i \rangle \cong \mathbb{Z} \quad \bullet$$

הוכחה: $F = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ שקול ל:

$$F = \langle \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle \rangle \quad \bullet$$

$$i \neq j \text{ עבור } a_i a_j = a_j a_i, a_i \in \langle v_i \rangle, a_j \in \langle v_j \rangle \quad \bullet$$

$$\text{אם } m'_1 v_1 + m'_2 v_2 + \dots + m'_n v_n = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n \text{ אזי } m'_i v_i = m_i v_i \text{ לכל } i. \quad \bullet$$

$$\forall 1 \leq i \leq n: \langle v_i \rangle \cong \mathbb{Z} \text{ שקול ל-} ord(v_i) = \infty, \text{ כלומר } k_i v_i = 0 \iff k_i = 0, \text{ ולכן אם } m'_i v_i = m_i v_i$$

אזי $m'_i = m_i$. כלומר, קיבלנו שתנאים אלו שקולים לקיום הצגה לכל $v \in F$, וליחידות הצגה זו. \square

מסקנה: חבורה אבלית F היא חופשית אם י"ם $F \cong \mathbb{Z}^n$.

תרגיל: תהי F אבלית חופשית עם בסיס v_1, \dots, v_n . יהיו $k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, אז גם

$$v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n, v_2, v_3, \dots, v_n$$

בסיס.

הערה: הטענה נכונה גם עבור סדרת יוצרים, והוכחה זהה פרט לטענה על יחידות ההצגה, שאינה דרושה עבור סדרת היוצרים.

הוכחה: יהי $v \in F$. מספיק להוכיח שקיימים m_1, \dots, m_n יחידים כך שמתקיים:

$$v = m_1(v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = m_1 v_1 + (m_1 k_2 + m_2) v_2 + \dots + (m_1 k_n + m_n) v_n$$

v_1, \dots, v_n בסיס, לכן קיימים r_1, \dots, r_n יחידים כך ש- $v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n$. לפיכך, בהכרח מתקיים $r_1 = m_1$, $\forall 2 \leq i \leq n: r_i = m_1 k_i + m_i$, כלומר $\forall 2 \leq i \leq n: m_i = r_i - m_1 k_i$, ולכן m_i נקבעים ביחידות. \square

משפט: תהי F חבורת חסרת פיתול אבלית. אם F נוצרת סופית אז F חופשית.

הוכחה: יהי n מספר מינימלי עבורו יש סדרת יוצרים בת n איברים ל- F . נניח בשלילה שלא קיים בסיס ל- F . לכן, לכל סדרת יוצרים v_1, v_2, \dots, v_n קיימים $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, לא כולם אפס, כך ש- $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = 0$. לכל סדרת יוצרים נסמן $\delta(v_1, v_2, \dots, v_n) := |m_1| + \dots + |m_n|$. נבחר סדרת יוצרים בת n איברים ל- F , v_1, v_2, \dots, v_n , כך ש- $\delta(v_1, v_2, \dots, v_n)$ מינימלי. אם קיים i יחיד עבורו $m_i \neq 0$, אזי $m_i v_i = 0$, ומשום ש- F חסרת פיתול בהכרח $v_i = 0$, בסתירה למינימליות גודל סדרת היוצרים. לפיכך, נניח שלפחות עבור שני ערכי i מתקיים $m_i = 0$. בה"כ נניח $m_1, m_2 \neq 0$, $|m_1| \leq |m_2|$, $0 < m_1$. נחלק עם שארית: $0 < m_1, |m_1| \leq |m_2|$, $m_2 = qm_1 + r$, $0 \leq r < m_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_1 v_1 + (qm_1 + r)v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_n v_n &= 0 \\ \Rightarrow m_1(v_1 + qv_2) + rv_2 + m_3 v_3 + \dots + m_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

לפי התרגיל הקודם גם הסדרה $v_1 + qv_2, v_2, v_3, \dots, v_n$ היא סדרת יוצרים. מתקיים:

$$\begin{aligned} \delta(v_1 + qv_2, v_2, \dots, v_n) &= |m_1| + |r| + |m_3| + \dots + |m_n| < |m_1| + |m_1| + \dots + |m_n| \leq \\ &\leq |m_1| + |m_2| + \dots + |m_n| = \delta(v_1, v_2, \dots, v_n) \end{aligned}$$

בסתירה למינימליות $\delta(v_1, v_2, \dots, v_n)$. \square

משפט: אם v_1, \dots, v_n בסיס לחבורה אבלית F ו- u_1, \dots, u_k סדרת יוצרים ל- F אזי $n \leq k$.

הוכחה: נרשום $v_i = m_{i1} u_1 + \dots + m_{ik} u_k$ עבור כל $i \in \{1, \dots, n\}$. נניח בשלילה $n > k$ ונתבונן במטריצה $M = (m_{ij})_{n \times k}$. מכיוון ש- $n > k$ שורות המטריצה M תלויות לינארית (מעל \mathbb{Q}). לכן, קיימים $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, לא כולם אפס, כך ש- $q_1(m_{11}, \dots, m_{k1}) + \dots + q_n(m_{1n}, \dots, m_{kn}) = (0, \dots, 0)$, ולכן $q_1 v_1 + \dots + q_n v_n = 0$ בסתירה לכך ש- v_1, \dots, v_n בסיס. \square

מסקנה: אם B_1, B_2 שני בסיסים שונים ל- F , שניהם עם אותו מספר איברים. למספר זה נקרא הדרגה של F , ונסמנו rkF .

משפט (משפט החבורות החלקיות של תת-החבורה החופשית F_n): תהי $H \leq F_n$ תת-חבורה של חבורה חופשית אבלית מדרגה n , אז גם H חופשית. יתר על כן, קיים בסיס v_1, \dots, v_n ל- F_n וקיימים $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, כך ש- $\varepsilon_1 | \varepsilon_2 | \varepsilon_3 | \dots | \varepsilon_k$ (כל איבר מחלק את עקבו), ו- $\varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_k v_k$ הוא בסיס ל- H .

הוכחה: אם $H = \langle 0 \rangle$ אז קבוצה ריקה של וקטורים מהווה בסיס ל- H , ולכן הטענה נכונה עבור $n = 0$. נוכיח אינדוקטיבית על n .

טענת עזר I: קיימים $u_1, \dots, u_n \in F_n$ כך שעבור $0 \neq v \in H$ מתקיים $v = \sum_{i=1}^n m_i u_i$, $m_1 > 0$. ואכן,

נבחר בסיס כלשהו $u_1, \dots, u_n \in F_n$ ו- $0 \neq v \in H$, לכן $v = \sum_{i=1}^n m_i u_i$ עבור $m_i \in \mathbb{Z}$ כלשהם, וקיים i עבורו $m_i \neq 0$. נחליף את u_1 ב- u_i כדי להניח $m_1 \neq 0$, ונחליף את u_i ב- $(-u_i)$ במידת הצורך

כדי להניח $m_1 > 0$. נסמן עבור $0 \neq v \in H$ $\varepsilon_1 := \min\{m_1 \mid u_1, \dots, u_n \in F_n : v = \sum_{i=1}^n m_i u_i\}$.

טענת עזר II: יש בסיס $u_1, \dots, u_n \in F_n$ כך ש- $\varepsilon_1 u_1 \in H$.

נבחר $u_1, \dots, u_n, v \in F_n$, כך ש- $\varepsilon_1 = m_1$. נחלק עם שארית: $0 \leq r_i < \varepsilon_1$, $m_i = q_i \varepsilon_1 + r_i$, $i \geq 2$.

נסמן $u_1' = u_1 + \sum_{i=2}^n q_i u_i$, וגם הקבוצה u_1', u_2, \dots, u_n בסיס של F_n (תרגיל מעמוד קודם),

ומתקיים $v = \varepsilon_1 u_1' + \sum_{i=2}^n r_i u_i$. ε_1 מינימלי מבין כל הצירופים הלינארים המבטאים את v , לכן

אם קיים i עבורו $r_i > 0$, לפי החלוקה בשארית $0 < r_i < \varepsilon_1$, ולכן ניתן להחליף את i ו-1 על מנת לקבל צירוף לינארי חדש, בו המקדם הראשון קטן יותר מ- ε_1 , בסתירה למינימליות של ε_1 . לכן,

$\forall 2 \leq i \leq n : r_i = 0$, ולכן $\varepsilon_1 u_1' = v \in H$ ומצאנו בסיס כנדרש.

יהי בסיס $u_1, \dots, u_n \in F_n$ כך ש- $\varepsilon_1 u_1 \in H$. נסמן:

$$F' = \langle u_2, \dots, u_n \rangle, \quad H' = H \cap F'$$

מתקיים $F_n = \langle u_1 \rangle \oplus F'$, לכן F' אבלית חופשית מדרגה $n-1$ עם בסיס u_2, \dots, u_n .

טענת עזר III: $H = \langle \varepsilon_1 u_1 \rangle \oplus H'$, כאשר מדובר בסכום ישר פנימי.

ואכן, מתקיים $\langle \varepsilon_1 u_1 \rangle \cap H' = \{0\}$, אחרת יתקיים $\langle \varepsilon_1 u_1 \rangle \cap F' \neq \{0\}$ בסתירה לכך ש- u_1, \dots, u_n

בסיס. $H' \triangleleft H$ מאבליות, לכן נותר להראות $H = \langle \varepsilon_1 u_1 \rangle + H'$.

יהי u איבר של H . נחלק עם שארית: $m_1 = q\varepsilon_1 + r$, $0 \leq r < \varepsilon_1$. מתקיים

$$u - q(\varepsilon_1 u_1) = ru_1 + \sum_{i=2}^n m_i u_i$$

ו- $r=0$ ממזעריות ε_1 . לכן $H \cap F' = H'$ לכן $u - q(\varepsilon_1 u_1) = \sum_{i=2}^n m_i u_i \in H \cap F' = H'$ (שייכות ל- F' ברורה, ו- H

מסגירות). לפיכך $H' = \langle \varepsilon_1 u_1 \rangle + H'$ ולכן $H = \langle \varepsilon_1 u_1 \rangle \oplus H'$.

לפי הנחת האינדוקציה, H' חופשית ויש בסיס v_2, \dots, v_n ל- F' , ו- $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in \mathbb{N}$ כך ש:
 $\varepsilon_2 | \varepsilon_3 | \dots | \varepsilon_k$ ו- $\varepsilon_2 v_2, \dots, \varepsilon_k v_k$ בסיס של H' . יהי $v_1 := u_1$, אז $F = \langle v_1 \rangle \oplus F'$, ולכן v_1, \dots, v_n ו- v_1, \dots, v_n בסיס ל- H . נשאר להראות $\varepsilon_1 | \varepsilon_2$. אכן, נכתוב $\varepsilon_2 = q\varepsilon_1 + r$, $0 \leq r < \varepsilon_1$, ונסמן $v_1' = v_1 + qv_2$, ונקבל v_1', v_2, \dots, v_n בסיס ל- F_n ומתקיים:

$$\varepsilon_2 v_2 - \varepsilon_1 v_1 \in H$$

$$\varepsilon_1 qv_2 + rv_2 - \varepsilon_1 v_1 = -\varepsilon_1 v_1' + rv_2 = -\varepsilon_1 v_1' + rv_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n$$

ומשום ש- ε_1 מזערי אזי $r=0$, ולכן $\varepsilon_2 = q\varepsilon_1$, כלומר $\varepsilon_1 | \varepsilon_2$. \square

מסקנה: אם F חופשית, $H \leq F$, אז $rkH \leq rkF$.

המבנה של חבורה אבלית נוצרת סופית

המטרה: להראות שכל חבורה אבלית נוצרת סופית היא סכום ישר של חבורות חופשיות (כלומר, סכום של כמה עותקי \mathbb{Z} ושל חבורות ציקליות סופיות).

טענה: תהא $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = G$, ולכל $1 \leq i \leq n$ נניח $N_i \triangleleft G_i$. נסמן $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n$.
 הוכח: $G/N \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2 \times \dots \times G_n/N_n$.

הוכחה: באינדוקציה, מספיק להראות ל- $n=2$. נגדיר העתקה $\varphi: G \rightarrow (G_1/N_1 \times G_2/N_2)$ על ידי: $\varphi(g_1, g_2) = (g_1 N_1, g_2 N_2)$. קל להראות שזהו אפימורפיזם.

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{(g_1, g_2) \mid (g_1 N_1, g_2 N_2) = (N_1, N_2)\} = \\ &= \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in N_1, g_2 \in N_2\} = N_1 \cdot N_2 = N \end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון \square . $G/N \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2$

המשפט היסודי של חבורות אבליות נוצרות סופית: כל חבורה אבלית נוצרת סופית A היא סכום

$$A \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_k} \times \overbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^r$$

כאשר $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k$, $r, k \geq 0$, ומספרים אלו נקבעים ביחידות.

הוכחה: נסמן $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. תהא חבורה חופשית F_n מדרגה n , ויהי u_1, \dots, u_n בסיס שלה. לפי משפט שהוכחנו, ההעתקה $\varphi: F \rightarrow A$, $\varphi(u_i) := a_i$, היא הומומורפיזם ויחידה, ומתקיים $A \cong F_n / \ker \varphi$. נסמן $H = \ker \varphi$. לפי משפט החבורות החלקיות של החבורה החילופית החופשית F_n , קיים בסיס v_1, \dots, v_n של F_n כך ש:

$$\begin{aligned} F_n &= \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle \\ H &= \langle \varepsilon_1 v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \varepsilon_k v_k \rangle = \langle \varepsilon_1 v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \varepsilon_k v_k \rangle \oplus \underbrace{\langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 0 \rangle}_{n-k} \end{aligned}$$

כאשר $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k$. לפי הטענה האחרונה מתקיים: $k \leq n$.

$$A \cong F/H \cong \langle v_1 \rangle / \langle \varepsilon_1 v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle / \langle \varepsilon_2 v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k \rangle / \langle \varepsilon_k v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1} \rangle / \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle / \langle 0 \rangle$$

אולם $\langle v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$, לכן $\langle v_1 \rangle / \langle \varepsilon_1 v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1}$, וכנ"ל עבור $i=2, \dots, k$, $\langle v_{k+1} \rangle / \langle 0 \rangle \cong \langle v_{k+1} \rangle \cong \mathbb{Z}$. נסמן $i=k+2, \dots, n$. קיבלנו:

$$A \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_k} \times \overbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^r$$

\square