

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

15 במאי 2017

תרגיל תהי $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. אזי

$$2\pi \int_{-1}^1 F(|a|t) dt = \int_{S^2} F(\langle x, a \rangle) dS(x)$$

טענה 0.1 אם $h: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, T העתקה אורתוגונלית, אזי

$$\int_{S^2} h(Tx) dS(x) = \int_{S^2} h(x) dS(x)$$

הוכחה: נסמן $r(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ פרמטריזציה של S^2 . נסמן

$$q = T \circ r$$

q גם היא פרמטריזציה. נחשב ונקבל

$$D_q = T \circ D_r$$
$$\sqrt{\det(D_q^T D_q)} = \sqrt{\det(D_r^T T^T T D_r)} = \sqrt{\det(D_r^T D_r)}$$

כעת נקבל

$$\begin{aligned} \int_{S^2} h(x) dS(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} h(q(\varphi, \theta)) \sqrt{\det(D_q^T D_q)} d\varphi d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} h(T(r(\varphi, \theta))) \sqrt{\det(D_r^T D_r)} d\varphi d\theta = \\ &= \int_{S^2} h(T(x)) dS(x) \end{aligned}$$

■

כעת כדי לפתור את התרגיל אפשר לשנות את a להיות ווקטור מהצורה $(0, 0, |a|)$ על ידי העתקה אורתוגונלית, ואז להשתמש בפרמטריזציה ולקבל את הדרוש.

1 משפט הדיברגנץ

ראינו בשיעור כל מיני הגדרות. נעשה רשימה.

הגדרה 1.1 1. שדה ווקטורי זו פונקציה חלקה $F : U \subseteq \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. אם F שדה ווקטורי אזי

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{Tr}(D_F(x))$$

3. אם M יריעה $n-1$ מימדית, לוקחים נורמל (בדרך כלל חיצוני) N של M (מניחים שאפשר לבחור את N באופן רציף).

4. שטף של F דרך M הוא

$$\operatorname{Flux}_F(M) = \int_M \langle F, N \rangle \, dS$$

משפט 1.2 (משפט הדיברגנץ) יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום, ויהי F שדה ווקטורי חלק על \bar{U} . ניקח $N(x)$ נורמל יחידה חיצוני של ∂U , שהיא יריעה $n-1$ מימדית. אזי

$$\int_{\partial U} \langle F, N \rangle \, dS = \int_U \operatorname{div} F \, dx$$

תרגיל נתון אליפסואיד

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

עבור $x \in \partial E$, נסמן $\rho(x)$ את המרחק מראשית הצירים למישור האפייני המשיק לשפה של E בנקודה x . חשבו

$$\int_{\partial E} \rho \, dS$$
$$\int_{\partial E} \frac{1}{\rho} \, dS$$

פתרון נסמן $N(x)$ את נורמל היחידה החיצוני של ∂E בנקודה x . נסמן θ את הזווית בין הווקטור x לאנג' דרך הראשית לווקטור N נקבל

$$\cos \theta = \frac{\rho}{|x|}$$

כלומר נקבל

$$\rho = \langle x, N \rangle$$

נכתוב $R(x) = x$ שדה ווקטורי. אזי

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} \rho \, dS &= \int_{\partial E} \langle R, N \rangle \, dS = \int_E \operatorname{div} R \, dx_1 dx_2 dx_3 = 3 \operatorname{Vol}(E) = \\ &= 4\pi abc \end{aligned}$$

נעבור לחשב את האינטגרל השני. נסמן $\Phi(x) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$. אזי

$$\nabla \Phi(x) = 2 \left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{x_3}{c^2} \right)$$

ואז $N(x) = \frac{\nabla \Phi(x)}{|\nabla \Phi(x)|}$ אזי

$$\begin{aligned} \rho = \langle x, N \rangle &= \frac{2}{|\nabla \Phi(x)|} \left\langle (x_1, x_2, x_3), \left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{x_3}{c^2} \right) \right\rangle = \frac{2}{|\nabla \Phi(x)|} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{|\nabla \Phi(x)|}{2} = \left\langle \frac{1}{2} \nabla \Phi(x), \frac{\nabla \Phi(x)}{|\nabla \Phi(x)|} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \nabla \Phi, N \right\rangle \end{aligned}$$

נסמן $q = \frac{1}{2} \nabla \Phi$ נקבל

$$\operatorname{div} q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

ואז ממשפט הדיברגנץ

$$\int_{\partial E} \frac{1}{\rho} = \int_E \operatorname{div} q \, dx = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{4}{3} \pi abc$$