

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

5 ביוני 2017

**טענה 0.1** יהי  $\Omega$  תחום ז'ורדן,  $f : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  עם תומך קומפקטי ורציפה. נגדיר

$$V_c = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\}$$

אזי

$$\int_0^\infty \text{vol}_n(V_c) \, dc = \int_\Omega f(x) \, dx$$

**הוכחה:** עבור  $t > 0$  נגדיר

$$G = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \geq t\}$$

ועכשיו מפוביני

$$\int_G dy = \int_0^\infty \left( \int_{\{f(x) \geq t\}} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, dx$$

■

**תרגיל** נתונות  $u, v \in C^2(G)$ , כאשר  $G$  תחום חסום. נניח כי  $u|_{\partial G} = v|_{\partial G}$  (כולל נגזרת נורמלית) וכי  $u$  הרמונית. הראו כי

$$\int_G |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_G |\nabla v|^2 \, dx$$

ניסוח שקול - אם  $u$  כזו, ואם  $f \in C_c^2(G)$  (כלומר יש לה תומך קומפקטי בתוך  $G$  -  $f = 0$  על השפה וגם  $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$  על השפה) אזי

$$\int_G |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_G |\nabla(u + f)|^2 \, dx$$

**פתרון מספיק להראות**

$$\int_G |\nabla f|^2 dx + 2 \int_G \langle \nabla u, \nabla f \rangle dx \geq 0$$

אבל האינטגרל השמאלי תמיד אי שלילי, ויכול להיות קטן כמה שנרצה. לכן אין ברירה אלא להראות

$$\int_G \langle \nabla u, \nabla f \rangle dx \geq 0$$

מנוסחת גרין השנייה נקבל

$$\int_G \langle \nabla u, \nabla f \rangle dx = - \int_G f \Delta u dx + \int_{\partial G} u \frac{df}{dn}$$

האינטגרל השמאלי מתאפס כי  $u$  הרמונית. הימני מתאפסת כי הנגזרת הנורמלית של  $f$  מתאפסת. לכן קיבלנו כי

$$\int_G |\nabla(f+u)|^2 dx = \int_G |\nabla u|^2 dx + \int_G |\nabla f|^2 dx$$

**תרגיל** חשבו שטח של רצועה ספירית:

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \mid a < z < b\}$$

כאשר  $-R \leq a < b \leq R$ .

**פתרון** ניקח פרמטריזציה

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \theta$$

כאשר  $-\pi < \varphi < \pi, \frac{a}{R} \leq \cos \theta \leq \frac{b}{R}$ . כעת נקבל שהנפח הוא

$$\int_{-\pi \cos^{-1}(\frac{b}{R})}^{\pi \cos^{-1}(\frac{a}{R})} \int |r_\varphi \times r_\theta| d\theta d\varphi$$

מתקיים

$$|r_\varphi \times r_\theta| = R^2 \sin \theta$$

ואז אפשר לחשב.

**תרגיל** חשבו את שטח הפנים (נפח) של העל משטחים הבאים:

$$1. \quad 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq a^2 \quad \text{עם} \quad x_4 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$.x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 \text{ עם } 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq a^2 .2$$

1. נכתוב פתרון

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$B = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq a^2\}$$

לכן הנפח הוא

$$\int_B \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2} dx = \sqrt{2} \text{Vol}(B) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} a^3$$

2. פרמטריזציה בקואורדינטות פולריות:

$$r(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

כאשר  $\rho \in [0, a]$ ,  $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi]$  אזי

$$D_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{D_r D_r^T} = \sqrt{2} \rho^2$$

ואז נקבל שהנפח הוא

$$\int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} \rho^2 d\varphi d\theta d\rho = \frac{4\pi^2 \sqrt{2}}{3} a^3$$