

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

10 במאי 2017

נמשיך את הדיון מהשיעור שעבר:

1 משפט הדיברגנץ

דוגמא הקבוצה $U = B(2) \setminus \partial B(1)$ אינה פתוחה חלקה.

תרגיל (קשה) אם U קשירה ופתוחה וכן ∂U יריעה חלקה ממימד $n - 1$, אזי U פתוחה חלקה.

תרגיל (חשוב שנשתמש בו) תהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה חלקה, ותהי $a \in \partial G$ כך שבנורמל היחידה החיצוני $N(a) = (N_1, \dots, N_n)$ הקואורדינטה N_i אינה 0 (עבור i מסויים). עבור $(x = x_1, \dots, x_n)$ נסמן

$$\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

נסמן $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ את ההעתקה $x \mapsto \hat{x}_i$. אזי קיימת תיבה פתוחה $a \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה חלקה $f : \pi_i(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$\partial G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i = f(\hat{x}_i)\}$$

וכן אחד מבין שני הבאים:

$$G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i < f(\hat{x}_i)\}$$

$$G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i > f(\hat{x}_i)\}$$

פתרון (רעיון) בלי הגבלת הכלליות, $i = n$. היא יריעה ממימד $n - 1$, כלומר קיימת הצגה סתומה רגולרית $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$(\partial G) \cap W = \phi^{-1}(0)$$

כאשר W סביבה של a . אזי אנחנו יודעים כי

$$N(a) = \pm \frac{\nabla \phi(a)}{|\nabla \phi(a)|}$$

נתון כי $N_n \neq 0$ ועל כן $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(a) \neq 0$. כעת רוצים להסתכל על השפה, על החלק שמעליה ועל החלק שמתחתיה - את ההמשך נשאיר כתרגיל לבית.

כעת, אם U תחום עם שפה "מספיק טובה", מגדירים עבור שדה וקטורי F

$$\text{outward Flux}_F(\partial U) = \int_{\partial U} (F, N) \, dS$$

כאשר N הוא נורמל היחידה החיצוני של U . פונקציונאל זה הוא אדיטיבי במובן הבא: אם

$$U = \text{int}(\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$$

אזי

$$\text{outward Flux}_F(\partial U) = \text{outward Flux}_F(\partial U_1) + \text{outward Flux}_F(\partial U_2)$$

דוגמאות לפונקציונאלים כאלה שאנחנו מכירים כבר:

$$1. U \mapsto v_n(U)$$

2. אם $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שנחשוב עליה כצפיפות, נגדיר

$$\mathcal{F}(U) = \int_U \rho(x) \, dx$$

וזה נותן מאסה. כאן, אם נסמן $Q \downarrow x$ קירוב של הסינגלטון x על ידי קוביות, אזי

$$\rho(x) = \lim_{Q \downarrow x} \frac{\mathcal{F}(Q)}{v_n(Q)}$$

יש לדוגמה האחרונה תכונה שנראית לנו נכונה - אם $\Omega_j \uparrow \Omega$ אז היינו מצפי שיתקיים $\mathcal{F}(\Omega_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\Omega)$

טענה 1.1 אם F שדה וקטורי חלק על קבוצה פתוחה U , אזי לכל $x \in U$ מתקיים

$$\text{div} F(x) = \lim_{Q \downarrow x} \frac{\text{outward Flux}_F(\partial Q)}{v(Q)}$$

טענה זו תנבע מאידך שנוכיח את משפט הדיברג':

משפט 1.2 (משפט הדיברג'ן) יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום וחלק. יהי F שדה וקטורי חלק על \overline{U} . נסמן בתור N את נורמל היחידה החיצוני של U . אזי

$$\int_{\partial U} (F, N) \, dS = \text{outward Flux}_F(\partial U) = \int_U \text{div} F$$