

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

17 במאי 2017

1 פונקציות הרמוניות

ראינו את תכונת הערך הממוצע לכל מימד שגודל ממש מאשר 2. במימד 2 השארנו לבית. ניתן רמז - פונקציית העזר היא

$$v(x) = \log \frac{|x|}{r}$$

משפט 1.1 (עקרון המקסימום) נניח כי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי u הרמונית בתחום G , ותהי $x_0 \in G$ עבורה

$$u(x_0) = \max_G u$$

אזי u קבועה.

הוכחה: נגדיר

$$U = \left\{ x \in G \mid u(x) = \max_G u \right\}$$

נשים לב שזו קבוצה פתוחה: מתכונת הערך הממוצע,

$$u(x) = \frac{1}{v_n(B)} \int_B u(y) \, dy$$

כאשר $B = B(x, r)$ המקיים $\bar{B} \subseteq G$. נקבל

$$u(x) = \frac{1}{v_n(B)} \int_B u(y) \, dx \leq \frac{1}{v_n(B)} \int_B u(x) \, dy = u(x)$$

השתמשנו בכך שלכל $y \in B$ מתקיים $u(y) \leq u(x)$. האינטגרלים השתוו, ולכן מרציפות u נקבל $u|_B = u(x)$. לכן $B \subseteq U$. כמו כן,

$$G \setminus U = \left\{ x \in G \mid u(x) < \max_G u \right\}$$

u רציפה, ולכן $G \setminus U$ פתוחה (מוגדרת על ידי תנאי פתוח). קיבלנו כי $G = U \cup (G \setminus U)$, $x_0 \in U$, אבל G קשירה, ולכן $G \setminus U$ ריקה. לכן סיימנו. ■

משפט 1.2 (משפט ליוביל) אם u פונקציה הרמונית על כל \mathbb{R}^n וחסומה מלמעלה (או מלמטה) אזי היא קבועה.

הוכחה: נניח כי $u \geq 0$. ניקח $x, y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. נגדיר

$$R = |x - y| + r$$

ואז

$$B(x, r) \subseteq B(y, R)$$

אזי

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x, r)} u \leq \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(y, R)} u = \\ &= \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{1}{v_n R^n} \int_{B(y, R)} u = \left(\frac{R}{r}\right)^n u(y) = \left(\frac{|x-y|+r}{r}\right)^n u(y) \end{aligned}$$

קיבלנו כי לכל $r > 0$ מתקיים

$$u(x) \leq \left(1 - \frac{|x-y|}{r}\right)^n u(y)$$

נשאף את $r \rightarrow \infty$ ונקבל $u(x) \leq u(y)$. מסימטריה, $u(y) \leq u(x)$ ולכן $u(x) = u(y)$. ■

עת נרצה לחזור ולהוכיח את משפט הדיברגנץ בכלליות המלאה שלו.

טענה 1.3 תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, והי $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i$ כיסוי פתוח של K . אזי קיים אוסף פונקציות חלקות $\varphi_1, \dots, \varphi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

1. $\text{supp} \varphi_i \subseteq U_i$ לכל i .

2. $\varphi_i \geq 0$ לכל i .

3. $\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1$ על K .

הוכחה: יש לנו כיסוי פתוח של קומפקט. מהלמה של לבג קיים $\rho > 0$ כך שלכל $x \in K$ קיים j שעבורו $B(x, 2\rho) \subseteq U_j$. נכסה את \mathbb{R}^n על ידי כדורים פתוחים B_j ברדיוס ρ (כמות בת מניה). נכתוב

$$B_j = B(X_j, \rho)$$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

כאשר $x_j \rightarrow \infty$. נגדיר כעת פונקציות

$$f_j(x) = \begin{cases} (\rho^2 - |x - x_j|^2)^2 & x \in B_j \\ 0 & x \notin B_j \end{cases}$$

f_j כולן חלקות C^1 . B_j מכסות את \mathbb{R}^n , ולכן מתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) > 0$$

כמו כן, בגלל שמתקיים $x_j \rightarrow \infty$, לכל x רק מספר סופי של f_j אינן 0. לכן הטורסופי וחיובי בכל מקום. כעת נגדיר

$$g_j(x) = \frac{f_j(x)}{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)}$$

ברור שמתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j = 1$$

נסמן J את אוסף כל אותם j עבורם $B_j \cap K \neq \emptyset$. לכל $j \in J$ קיים $x \in K \cap B_j$ ואז

$$\overline{B_j} \subseteq B(x, 2\rho) \subseteq U_i$$

עבור i מסויים. לכל j נבחר באופן שרירותי i כזה ונסמן אותו $i = \sigma(j)$. נגדיר

$$\varphi_i(x) = \sum_{j \in J, \sigma(j)=i} g_j(x)$$

■