

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

22 במאי 2017

1 משפט הדיברגנץ

טענה 1.1 (פירוק יחידה חלק) תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, והי

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i$$

כיסוי פתוח שלה. קיימות פונקציות חלקות $\varphi_1, \dots, \varphi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ בעלות תומך קומפקטי כך שמתקיים

1. $\text{supp} \varphi_i \subseteq U_i$ לכל i .

2. $\varphi_i \geq 0$ לכל i .

3. על K מתקיים

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1$$

הוכחה: ראינו בשיעור שעבר אבל נחזור עליה. מהלמה של לבג, קיים $\rho > 0$ כך שלכל $x \in K$ קיים $1 \leq i \leq N$ שעבורו $B(x, 2\rho) \subseteq U_i$. ניקח כיסוי של \mathbb{R}^n על ידי כדורים פתוחים

$$B_j = B(x_j, \rho) \\ |x_j| \rightarrow \infty$$

נגדיר כעת

$$f_j(x) = \left(\rho^2 - |x - x_j|^2 \right)^2 \cdot \mathbb{1}_{B_j}$$

וזו פונקציה אי שלילית חלקה C^1 . אם נרצה חלקה C^n נצטרך לקחת חזקת n , ואפשר אפילו להשיג חלקות C^∞ עם מאמץ מעט יותר גדול (משהו בסגנון $e^{-\frac{1}{\rho^2 - |x - x_j|^2}}$ או משהו כזה).

נסמן $J \subseteq \mathbb{N}$ את כל אותם $j \in \mathbb{N}$ עבורם $B_j \cap K \neq \emptyset$. לכל $j \in J$, אם ניקח $x \in B_j \cap K$ אזי $\overline{B_j} \subseteq B(x, 2\rho) \subseteq U_i$ עבור $1 \leq i \leq N$ כלשהו. לכל $j \in J$ נבחר i עבורו $\overline{B_j} \subseteq U_i$ נסמן $i = \sigma(j)$, ונגדיר

$$\varphi_i(x) = \sum_{j \in J, \sigma(j)=i} g_j(x)$$

ברור שמתקיים

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = \sum_{B_j \cap K \neq \emptyset} g_j(x) = 1$$

■ כאשר $x \in K$, וכן $\text{supp} \varphi_i \subseteq U_i$. לכן סיימנו.
 כעת אנחנו מוכנים להוכיח את משפט הדיברגנץ.

משפט 1.2 יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום וחלק. יהי F שדה וקטורי חלק על \overline{G} , ויהי N נורמל היחידה החימוני של G . אזי

$$\int_{\partial G} \langle F, N \rangle dS = \int_G \text{div}(F)$$

הוכחה: נסמן $\Gamma = \partial G$. לכל $x \in \overline{G}$ נבחר כדור פתוח B_x עם מרכז x באופן הבא:

1. אם $x \in G$ ניקח $B_x \subseteq G$ כלשהו.

2. אם $x \in \partial G$, נסמן $N = (N_1, \dots, N_n)$, ונרצה שיתקיים $N_i \neq 0$ לכל i . אם זה לא המצב, נפעיל העתקת $T(y) = x + P(y - x)$ כאשר $P \in O(n)$ אורתוגונלית, וכך שכל קואורדינטה של $P(N(x))$ אינה 0. נגדיר

$$\tilde{G} = T(G)$$

$$\tilde{\Gamma} = T(\Gamma)$$

$$\tilde{N} = P(N)$$

נשים לב כי \tilde{N} נורמל יחידה חימוני של \tilde{G} בנקודה x . נסמן $\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_n)$

ואז $\tilde{N}_i \neq 0$. בסביבת x , \tilde{G} היא תת גרף או על גרף לפי כל אחת מהקואורדינטות (היה כתרגיל באחת ההרצאות הקודמות). נוכל להניח שזה תמיד תת גרף בכל קואורדינטה, כי אפשר להרכיב את P עם העתקה שהופכת את סימני הקואורדינטות שצריך. לכן

$$\tilde{G} \cap Q_i = \left\{ \xi \in Q_i \mid \xi_i < g_i(\tilde{\xi}_i) \right\} \text{ ואז}$$

$$\tilde{\Gamma} \cap Q_i = \left\{ \xi \in Q_i \mid \xi_i = g_i(\tilde{\xi}_i) \right\}$$

כמובן, $x \in Q_1, \dots, Q_n$. נבחר כדור B_x עם מרכז בנקודה x , שמוכל בחיתוך $\bigcap Q_i$.

כעת, נסתכל על $\bar{G} \subseteq \bigcup B_x$. יש תת כיסוי סופי

$$\bar{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{x_i}$$

לפי הטענה הקודמת, קיים פירוק יחידה חלק עבור הכיסוי הזה, שנשמנו $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.
נרשום כעת

$$F = \sum_{i=1}^m F \varphi_i$$

ברור כעת כי $\text{supp}(F \varphi_i) \subseteq B_{x_i}$. אם נראה את המשפט עבור כל $F \varphi_i$, נוכל לסיים מלינאריות - לכן מספיק להוכיח את המשפט עבור שדה ווקטורי F חלק על \bar{G} כך שמתקיים $\text{supp} F \subseteq B_x$ עבור x כלשהו.
נפריד למקרים.

1. אם $x \in G$, אזי $B_x \subseteq G$. אם כן, לקחנו F עם $\text{supp} F \subseteq B_x$, ולכן $F \equiv 0$ על ∂G .
נסמן $F = (F_1, \dots, F_n)$, ונרצה להראות כי

$$\int_G \text{div} F = 0$$

מתקיים

$$\int_G \text{div} F = \int_{B_x} \text{div} F$$

כעת, אם ניקח i ספציפי, מתקיים

$$\int_{B_x} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \int \int \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i d\hat{x}_i$$

ממשפט ניוטון לייבניץ החלק הפנימי מתאפס לכל בחירה של \hat{x}_i - הוא שווה להפרש של ערכי F_i בשתי נקודות על שפת הכדור, ששם F מתאפסת. לכן כאשר נסכום את האינטגרלים האלה נקבל מההגדרה

$$\int_{B_x} \text{div} F = 0$$

2. אם $x \in \Gamma = \partial G$, נסובב את G סביב x , וגם את השדה הווקטורי F . אפשר להניח, אחרי הסיבוב, שהתחום G הוא תת גרף ביחס לכל קואורדינטה ξ_i . כלומר יש תיבות Q_i עם

$$G \cap Q_i = \left\{ \xi \in Q_i \mid \xi_i < g_i(\hat{\xi}_i) \right\}$$

$$\Gamma \cap Q_i = \left\{ \xi \in Q_i \mid \xi_i = g_i(\hat{\xi}_i) \right\}$$

$$\text{supp}(F) \subseteq B_x \subseteq \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

כעת, אנו דנים באינטגרל

$$\int_{\partial G} \langle F, N \rangle dS$$

מתקיים

$$\langle F, N \rangle = \sum_{i=1}^n F_i N_i$$

נחשב:

$$\int_{\Gamma} F_i N_i dS = \int_{\Gamma \cap B_x} F_i N_i = \int_{\Gamma \cap Q_i} F_i N_i dS$$

כעת, יש לנו את הפרמטריזציה הסטנדרטית של הגרף של g , ולפיה נקבל

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g_i|^2}}$$

ובסך הכל

$$\int_{\Gamma} F_i N_i dS = \int_{\hat{Q}_i} F_i(\hat{\xi}_i, g_i(\hat{\xi}_i)) d\hat{\xi}_i$$

כאשר

$$\hat{Q}_i = \{\hat{\xi}_i \mid \xi \in Q\}$$

מהצד השני, יש לנו את סכום של האינטגרלים

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} d\xi &= \int_{G \cap B_x} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} d\xi = \int_{G \cap Q_i} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} d\xi = \\ &= \int_{\hat{Q}_i} \int_{a_i}^{g(\hat{\xi}_i)} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} d\xi_i d\hat{\xi}_i \end{aligned}$$

כאשר $a_i = \inf \{\xi_i \mid \xi \in Q_i\}$. כעת, מניטון לייבני נקבל

$$\int_{\hat{Q}_i} \int_{a_i}^{g(\hat{\xi}_i)} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} d\xi_i d\hat{\xi}_i = \int_{\hat{Q}_i} F_i(\hat{\xi}_i, g_i(\hat{\xi}_i)) d\hat{\xi}_i$$

זה שווה למה שקיבלנו קודם. על ידי סכימה של אלה מאחד עד n , נקבל את השוויון שמחפשים במשפט הדיברגנץ, ולכן סיימנו.

■