

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

29 במאי 2017

את תחילת השיעור השקענו בחזרה על ההוכחה של משפט הדיברגנץ לתחום בעל שפה לא חלקה. נותר לנו כעת להראות את קיום הפונקציה שהשתמשנו בה, שסימנו ψ . נרצה שהיא תקיים את הדברים הבאים:

1. $0 \leq \psi \leq 1$.

2. $\psi \equiv 1$ על $K_{+\varepsilon}$.

3. $\psi \equiv 0$ מחוץ לסביבה $K_{+3\varepsilon}$.

4.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi| = o(1)$$

נשתמש בקונספט של קונבולוציה כדי לקבל את הפונקציה הזו. ניקח פונקציה חלקה C^1 שנסמנה $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המקיימת

$$\chi(x) = 0$$

עבור $|x| \geq 1$, $\chi \geq 0$ וכן $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$. נגדיר

$$\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x) dx &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \left[y = \frac{x}{\varepsilon} \right] = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) dy = 1 \end{aligned}$$

כעת ניקח את $\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}$ ונהפוך אותה לחלקה על ידי קונבולוציה (אפשר להוכיח שאפילו שהאינדקטור לא חלק, קונבולוציה עם משהו חלק כמו χ_ε תהיה חלקה). נגדיר

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y) \chi_\varepsilon(x-y) dy$$

אפשר ממש לחשב (כמו בחדוא 2) ולראות שכל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות לפי הנוסחה. לכן ψ חלקה C^1 , והביטוי לנגזרת החלקית הוא

$$\psi_{x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y) (\chi_\varepsilon)_{x_j}(x-y) dy$$

נותר לנו לראות את שאר התכונות. ברור כי $\psi \geq 0$. מצד שני, האינדקטור חסום על ידי 1 ולכן

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y) \chi_\varepsilon(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) dy = 1$$

לכן קיבלנו את התנאי הראשון שרצינו. כעת,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(x-y) \chi_\varepsilon(y) dy = \\ &= \int_{\varepsilon B_1(0)} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(x-y) \chi_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

אם $x \in K_{+\varepsilon}$ אזי עבור כל $y \in \varepsilon B$, $x-y \in K_{+2\varepsilon}$. לכן

$$\psi(x) = \int_{\varepsilon B} \chi_\varepsilon(y) dy = 1$$

זה התנאי השני שרצינו. אם $x \notin K_{+3\varepsilon}$, וכן $y \in \varepsilon B$, אזי בהכרח $x-y \notin K_{+2\varepsilon}$, ולכן

$$\psi(x) = \int_{\varepsilon B} 0 = 0$$

וזה התנאי השלישי. כעת, נרשום

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y) dy$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K+2\varepsilon}(y) \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y) \right| dy dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K+2\varepsilon}(y) \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y) \right| dx dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K+2\varepsilon}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y) \right| dx \right) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K+2\varepsilon}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| dx \right) dy = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K+2\varepsilon}(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| dx \right) = \\
 &= v_n(K+2\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial (\varepsilon^{-n} \chi(\frac{x}{\varepsilon}))}{\partial x_j}(x) \right| dx = \\
 &= v_n(K+2\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \varepsilon^{-n} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| dx = \\
 &= v_n(K+2\varepsilon) \varepsilon^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| dx = \left[z = \frac{x}{\varepsilon} \right] = \\
 &= \underbrace{v_n(K+2\varepsilon)}_{o(\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_j}(z) \right| dz}_{\text{constant}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

לכן הראינו כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right| dx = o(1)$$

לכל j , ואז

$$|\nabla f| = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2} \leq \sum \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right|$$

ולכן גם

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x)| dx = o(1)$$