

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

7 ביוני 2017

1 אחד-תבניות דיפרנציאליות

הגדרנו בשיעור שעבר אחד-תבניות דיפרנציאליות כבחירה של פונקציונאל לינארי על המרחב המשיק בכל נקודה:

$$U \ni x \rightarrow \omega_x \in T_x^* \mathbb{R}^n$$

דיברנו גם על אינטגרציה של תבניות - לקחנו $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ מסילה, ותבנית ω , והגדרנו

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

תכונות

1. אם $\mu = \gamma \circ \varphi$, כאשר $\varphi : J \rightarrow I$ פונקציה חלקה, מונוטונית עולה וחד-חד-ערכית ועל, נוכל לכתוב עבור $s \in J$ את $t \in I$ בתור $t = \varphi(s)$. כעת

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_I \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_J \omega_{\gamma(\varphi(s))}(\gamma'(\varphi(s))) \varphi'(s) ds = \\ &= \int_J \omega_{\mu(s)}(\gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s)) ds = \int_J \omega_{\mu(s)}(\mu'(s)) ds = \int_{\mu} \omega \end{aligned}$$

2. אם $-\gamma$ זאת עקומה שהולכת בכיוון ההפוך, $-\gamma : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$, אזי $(-\gamma)'(s) = \gamma'(-s)$, אזי

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

וזאת משום שמתקיים

$$\int_a^b = \int_{-a}^{-b} = - \int_{-b}^{-a}$$

3. ניקח γ שהיא שרשור של γ_1, γ_2 , ונכתוב $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, במובן שמתקיים

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

תרגיל תהי $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ חלקה C^1 למקוטעין. נניח כי $\gamma([0, 1]) \subseteq U$, ω אחד-תבנית דיפרנציאלית על U . אזי

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq \max_{x \in \gamma([0, 1])} |\omega_x| L(\gamma)$$

טענה 1.1 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי ω אחד-תבנית דיפרנציאלית על U . אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל עקומה סגורה $\gamma \subseteq U$ מתקיים

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

2. לכל שתי עקומות $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq U$ עם אותן נקודות התחלה וסוף מתקיים

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

3. קיימת פונקציה $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ חלקה C^1 עם $\omega = df$.

הוכחה: ברור שמתקיים $2 \iff 1$ בגלל היכולת לשרשר עקומות. כעת נראה $2 \implies 3$. נניח כי $\omega = df$, ונניח כי $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. אז

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = \int_a^b d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

כעת נראה $3 \implies 2$. נקבע נקודה $q \in U$, ולכל $x \in U$ ניקח עקומה $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow U$ עם $\gamma_x(0) = q, \gamma_x(1) = x$. נגדיר

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

$f(x)$ מוגדרת ביחידות לפי תכונה 2 שראינו קודם. נכתוב

$$\omega_x = \sum a_i(x) dx_i$$

ואז נרצה לדעת האם

$$\omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

נבדוק שמתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$ נכתוב

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \varepsilon, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\varepsilon}$$

נכתוב $y = (x_1 + \varepsilon, x_2, \dots, x_n)$ ואז

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_{[x,y]} \omega = \int_{\substack{\gamma(t) = x + te_1 \\ t \in [0, \varepsilon] \\ \gamma'(t) = (1, 0, \dots, 0)}} \omega = \\ &= \int_0^\varepsilon \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \int_0^\varepsilon a_1(x_1 + \varepsilon, x_2, \dots, x_n) dt \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon a_1(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) dt = a_1(x_1, \dots, x_n)$$

■ באותו אופן מראים את כל שאר הנגזרות החלקיות.

משפט 1.2 (פואנקרה) נניח $\omega = \sum a_i(x) dx_i$ אחד-תבנית דיפרנציאלית. אם $\omega = df$, כלומר

$$a_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

אזי בהכרח

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

בכדור או בכל \mathbb{R}^n , זה תנאי מספיק לכך שהתבנית מדוייקת (כלומר יש לה קדומה).