

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

14 ביוני 2017

1 משפט גרין

המשפט, שניסחנו אותו בשיעור שעבר, אמר שאם G תחום עם שפה "טובה", $\alpha = Pdx + Qdy$, היא אחד-תבנית דיפרנציאלית על G , אזי

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

1.1 חישוב שטח

נרצה

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

בתחום G .

דוגמאות

$$\alpha = -ydx$$

$$\alpha = xdy$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$$

דוגמא נסמן $z_i = (x_i, y_i)$, ונתבונן בקו הפוליגונאלי הסגור $\Gamma = [z_0, \dots, z_N = z_0]$ ובתחום G שהוא חוסם. אזי

$$\text{area}(G) = \int_{\partial G} xdy = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[z_i, z_{i+1}]} xdy$$

ניקח מסילה $\gamma_i(t) = z_i(1-t) + z_{i+1}t$ עבור $t \in [0, 1]$ ואז

$$\int_{[z_i, z_{i+1}]} xdy = \int_0^1 (x_i(1-t) + x_{i+1}t)(y_{i+1} - y_i) dt = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$$

ולכן

$$\text{area}(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$$

1.2 נוסחת קושי

נניח כי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ חלקה C^1 . נכתוב $f = u + iv$. לכל $z \in G$,

$$d_z f : T_z \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$df = du + iv = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

נכתוב כעת

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= u_x + iv_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= u_y + iv_y \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned} dz : T_{z_0} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ dz &= dx + idy \end{aligned}$$

ויש לנו גם את

$$\begin{aligned} \bar{z} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ d\bar{z} &= dx - idy \end{aligned}$$

נמצא את המקדמים בפירוק $df = Adz + Bd\bar{z}$. נכתוב

$$df = Adz + Bd\bar{z} = A(dx + idy) + B(dx - idy) = (A + B)dx + i(A - B)dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

מכאן נשיג

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial z} \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

נשים לב שאי אפשר לחשוב על אלה כנגזרות באמת - זה רק סימון פורמלי. נשים לב שנוכל לפתח:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \\ &= \frac{1}{2} (u_x - v_y) + i \frac{1}{2} (u_y + v_x) \end{aligned}$$

ונשים לב שזה מתאפס אם ורק אם משוואות קושי-רימן מתקיימות.

תרגיל

$$(fg)_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}g + fg_{\bar{z}}$$

ולכן אם g אנליטית

$$(fg)_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}g$$

משפט 1.1 (קושי-גרין) יהי $G \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום עם שפה "טובה" (חלקה C^1 למקוטעין) ונניח כי $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה C^1 על \bar{G} . אזי לכל $w \in G$ מתקיים

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-w} dx dy$$

מסקנה 1.2 אם f אנליטית על \bar{G} אזי

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

וזו נוסחת קושי הרגילה מפונקציות מרוכבות.

מסקנה 1.3 אם $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ עם תומך קומפקטי, ניקח את G להיות עיגול שמכיל את $\text{supp} f$ ואז

$$f(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-w} dx dy$$

אם f חלקה, ונגדיר $H = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, אז היא רציפה. אזי

$$x \mapsto \iint_G \frac{H(z)}{z-w} dx dy$$

אם $H(w) \neq 0$, הפונקציה בתוך האינטגרל לא חסומה בסביבת w . עם זאת, נוכל להגדיר

$$\mathbb{C}_r = \{z \mid r \leq |z-w| < 2r\}$$

ואז

$$\left| \frac{H(z)}{z-w} \right| \leq \frac{C}{|z-w|} \leq \frac{C}{r}$$

כאשר C הוא החסם של H על הכדור (כי היא קומפקטית והפונקציה H רציפה). השטח של הקבוצה הוא πr^2 , ולכן חסם על האינטגרל הוא $C\pi r$, ואז אם נבחר $r = \frac{1}{2\epsilon}$ נראה שהאינטגרל כן מתכנס שם.