

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

28 ביוני 2017

### 1 תבניות

אנחנו נמשיך להתמקד בתחומים  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . דיברנו על  $\Lambda^2(\mathbb{R}^2) = \Lambda^1(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2)^*$  ודיברנו על פעולת  $\wedge$ :  $\text{span}\{\det\}$

$$\wedge : \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \times \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$$

אפשר, בהינתן  $U$  תחום, להרחיב את זה אל

$$\wedge : \Omega^1(U) \times \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

כאשר לכל  $\alpha, \beta : T_q U \rightarrow \mathbb{R}, q \in U$  ואז

$$(\alpha \wedge \beta)_q = \alpha_q \wedge \beta_q \in \Lambda^2(T_q U)$$

בקואורדינטות, נכתוב

$$\alpha = a_1 dq_1 + a_2 dq_2$$

$$\beta = b_1 dq_1 + b_2 dq_2$$

ואז

$$\alpha \wedge \beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dq_1 \wedge dq_2$$

כאשר ראינו שעבור הבסיס הסטנדרטי של  $T_q U \cong \mathbb{R}^2$   $e_1, e_2$

$$dq_1 \wedge dq_2(e_1, e_2) = 1$$

$$dq_1 \wedge dq_2(e_2, e_1) = -1$$

$$dq_1 \wedge dq_2(e_i, e_i) = 0$$

כעת, כל  $\omega \in \Omega^2(U)$  נוכל לכתוב בתור  $\omega = f(q_1, q_2) dq_1 \wedge dq_2$ .

#### 1.1 אינטגרציה

אם  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום מישורי, ואם  $\omega \in \Omega^2(U)$ , נרצה לבצע אינטגרציה על  $U$  של  $\omega$ . נעשה זאת בדומה למה שעשינו עבור יריעות דו מימדיות בתוך  $\mathbb{R}^3$  - ניקח  $\delta$ -רשת ונסכום על הקודקודים שלה בתוך  $U$ :

$$\sum_{q \in U} \omega_q(\delta e_1, \delta e_2) = \sum_{q \in U} \delta^2 \omega_q(e_1, e_2) \rightarrow \int_U \omega_q(e_1, e_2) dq_1 dq_2$$

**משפט 1.1** (גריין) יהי  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום חלק. יהיו  $f, g : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  חלקות. אזי

$$\int_{\partial G} f du + g dv = \int_G (g_u - f_v) du dv$$

**הערה 1.2** נגדיר

$$d\alpha = d(f du + g dv) = (g_u - f_v) du \wedge dv$$

ואז המשפט נראה כמו

$$\int_{\partial G} \alpha = \int_G d\alpha$$

זה משפט סטוקס, שמכליל את כל העסק (לתחומים כלליים במימדים כלליים, ותבניות כלליות ממימדים כלליים). זה משתמש באופרטור האמיתי

$$d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

נסמן גם

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U)$$

ואז כבר יש לנו

$$d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U) \\ f \mapsto df$$

כלומר  $f$  עובר לדיפרנציאל שלו. קיבלנו שרשרת העתקות

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U)$$

**תרגיל**

.1

$$\alpha, \beta \in \Omega^1(U) \\ d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

.2

$$f \in \Omega^0(U)$$
$$d(df) = 0$$

.3

$$f \in \Omega^0(U), \alpha \in \Omega^1(U)$$
$$d(\alpha f) = df \wedge \alpha + f \cdot d\alpha$$

למעשה, שלוש התכונות הללו, אם מסכימים שהאופרטור  $d$  פועל על פונקציות בתור דיפרנציאל, מגדירות את  $d$  באופן יחיד על  $\Omega^1(U)$ .

**תרגיל** יהיו  $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$  קבוצות פתוחות. תהי  $\varphi : U \rightarrow V$  העתקה חלקה.

1. לכל  $\alpha \in \Omega^1(V)$ , ניזכר שהגדרנו את  $\varphi^* \alpha \in \Omega^1(U)$ , ומתקיים

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^* \alpha)$$

2. לכל  $\alpha, \beta \in \Omega^1(V)$ , מתקיים

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$$

3. לכל  $\alpha \in \Omega^1(V)$  ולכל עקומה  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  מתקיים

$$\int_{\gamma} \varphi^* \alpha = \int_{\varphi \circ \gamma} \alpha$$

4. אם  $\varphi : U \rightarrow V$  דיפאומורפיזם ונתונה  $\omega \in \Omega^2(V)$  אזי

$$\int_U \varphi^* \omega = \int_V \omega$$

ננסח כעת את משפט גרין בשפה זו (שהיא טבעית, מהתכונות שראינו), ונוכיח אותו בעזרתה.

**משפט 1.3** (גרין) אם  $G$  תחום חלק,  $\omega \in \Omega^1(G)$  אזי

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega$$

**הוכחה:** אנחנו הולכים לכסות את  $G$  עם ריבועים עקומים. עבור  $Q = [0, 1]^2$  בדקנו -

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \alpha &= \int_0^1 f(u, 0) du + \int_0^1 g(1, v) dv - \int_0^1 f(u, 1) du - \int_0^1 g(0, v) dv = \\ &= - \int_0^1 f(u, 1) - f(u, 0) du + \int_0^1 g(1, v) - g(0, v) dv = \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v} dudv + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u} dudv = \int_Q \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv \end{aligned}$$

נשתמש בחישוב זה כדי להוכיח לכל תחום. ניקח כיסוי של  $\bar{G}$  על ידי תמונות דיפאומורפיות של  $\bar{Q}$  - כלומר

$$\varphi_i : \bar{Q} \rightarrow \bar{G}$$

דיפאומורפיזם לתמונה, עם  $\varphi_i(Q) \subseteq G$ , ואז

$$\bigcup_{i=1}^n \varphi_i(Q) = G$$

נזכור כי  $\alpha = fdu + gdv$ . אפשר לרשום  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$  כאשר  $\alpha_i = 0$  במשלים של  $\varphi_i(\bar{Q})$ . לכן, מספיק להראות את המשפט על  $\alpha_i$ :

$$\int_{\partial G} \alpha_i = \int_G d\alpha_i$$

ולסיים. עבור אחד שכזה, הכל קורה בתוך  $\varphi_i(\bar{Q})$ , ולכן

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\varphi_i(Q))} \alpha_i &= \int_{\varphi_i(\partial Q)} \alpha_i = \int_{\partial Q} \varphi_i^* \alpha_i \\ \int_{\varphi_i(Q)} d\alpha_i &= \int_Q \varphi_i^* d\alpha_i = \int_Q d(\varphi_i^* \alpha_i) \end{aligned}$$

■ אנחנו יודעים שאגפים ימין שווים, מהמקרה של הריבוע, ולכן נסיים.