

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

3 באפריל 2017

1 מרחב משיק

נמשיך בדיוק על המרחב המשיק, והפעם נדבר על על-משטחים כלומר יריעות ממימד $n - 1$ בתוך \mathbb{R}^n .

יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על משטח, כלומר $\dim M = n - 1$. כעת, לכל $x \in M$ מתקיים

$$\dim T_x M = n - 1$$

ולכן

$$\dim (T_x M)^\perp = 1$$

הגדרה 1.1 יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על משטח. נורמל יחידה $N(x)$ ליריעה M בנקודה x הוא ווקטור מתוך $(T_x M)^\perp$ עם $|N(x)| = 1$. נשים לב שבכל x יש בדיוק שתי בחירות אפשריות של $N(x)$.

כיצד נמצא נורמל יחידה? אם M נתון בעזרת הצגה סתומה מקומית $\{F = 0\}$, $M \cap U = \{F = 0\}$, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ חלקה ורגולרית בנקודות של $M \cap U$, אז יודעים שמתקיים

$$T_x M = (\nabla F(x))^\perp$$

אז אפשר למצוא נורמל יחידה על ידי

$$N = \pm \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$$

נניח עכשיו כי M היא באופן מקומי גרף, כלומר יש $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים

$$M \cap U = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in G\}$$

כאשר $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ פתוחה. נגדיר

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

ואז

$$\begin{aligned} \nabla F(x) &= (-f_{x_1}, \dots, -f_{x_{n-1}}, 1) \\ |\nabla F(x)| &= \sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \dots, x_{n-1})|^2} \end{aligned}$$

ומכאן נקבל נורמל. כעת, נניח כי $r : V \rightarrow M$ מפה. אנחנו יודעים כי המרחב המשיק נפרש על ידי הנגזרות החלקיות של r , ולכן נחפש להן ווקטור אורתוגונלי. כיצד נמצא ווקטור שהוא משלים אורתוגונלי של $n-1$ ווקטורים נתונים? על ידי מכפלה מצולבת (Cross Product). נניח כי $R_1, \dots, R_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ווקטורים. נגדיר

$$\varphi(R) = \det(R, R_1, \dots, R_{n-1})$$

כאשר $R \in \mathbb{R}^n$. כעת זהו פונקציונל לינארי, ולכן קיים ויחיד ווקטור y כך שמתקיים

$$\varphi(R) = (y, R)$$

ברור כי כל R_i בגרעין של φ , כי זה ייתן דטרמיננטה של מטריצה שבה יש שורה שמופיעה פעמיים, ולכן y מאונך לכל R_i . נקרא המכפלה המצולבת של R_1, \dots, R_{n-1} ומסמנים y

$$y = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{n-1}$$

פורמלית אפשר לחשבו על ידי

$$R_1 \times \dots \times R_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{(n-1)1} & R_{(n-1)2} & \dots & R_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

כאשר e_i הם ווקטורי הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה 1.2 יהיו $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ווקטורים. נגדיר את דטרמיננטת גראם שלהם על ידי

$$\Gamma(v_1, \dots, v_k) = \det((v_i, v_j))_{i,j=1}^k$$

תרגיל יהיו $R_1, \dots, R_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ווקטורים. אזי הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם $\Gamma(R_1, \dots, R_k) \neq 0$ אם ורק אם $R_1 \times \dots \times R_{n-1} \neq 0$.

טענה 1.3 יהיו $R_1, \dots, R_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. נסמן $y = R_1 \times \dots \times R_{n-1}$. אזי

$$|y| = \sqrt{\Gamma(R_1, \dots, R_{n-1})}$$

הוכחה: מהתרגיל, $\Gamma(R_1, \dots, R_{n-1}) \neq 0 \iff y \neq 0$. לכן נניח כי $y \neq 0$, ונתבונן בנרמול

$$n = \frac{y}{|y|}$$

אזי

$$(y, n) = \left(y, \frac{y}{|y|} \right) = |y|$$

כעת,

$$\begin{aligned} |y|^2 &= (y, n)^2 = \det(n, R_1, \dots, R_{n-1})^2 = \det\left((n, R_1, \dots, R_{n-1}) \cdot (n, R_1, \dots, R_{n-1})^t\right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} (n, n) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (R_1, R_1) & (R_1, R_2) & \dots & (R_1, R_{n-1}) \\ 0 & (R_2, R_1) & (R_2, R_2) & \dots & (R_2, R_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (R_{n-1}, R_1) & (R_{n-1}, R_2) & \dots & (R_{n-1}, R_{n-1}) \end{pmatrix} = \Gamma(R_1, \dots, R_{n-1}) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.4 אם $r : V \rightarrow M$ מפה על-משטח, ונסמן $x = r(q)$, אזי נורמלי היחידה הם

$$N(x) = \pm \frac{r_{q_1} \times \dots \times r_{q_{n-1}}}{\sqrt{\Gamma(r_{q_1}, \dots, r_{q_{n-1}})}}$$

נשווה בין החישובים:

יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח. תהי $x \in M$ נקודה. קיימת סביבה U כך שמתקיים

$$M \cap U = \{(\xi, f(\xi)) \mid \xi \in G\}$$

כאשר $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\xi = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

נגדיר הצגה סתומה

$$\begin{aligned}F(x_1, \dots, x_n) &= x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \nabla F(x) &= (-f_{x_1}, \dots, -f_{x_{n-1}}, 1) \\ |\nabla F(x)| &= \sqrt{|\nabla F(\xi)|^2 + 1}\end{aligned}$$

כמו כן נגדיר גם פרמטריזציה

$$r(\xi) = r(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

כעת הנגזרות החלקיות הן

$$r_{x_i} = e_i + i f_{x_i}$$

עבור $e_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq n-1$ הבסיס הסטנדרטי. כעת, הווקטורים $r_{x_1}(\xi) \times \dots \times r_{x_{n-1}}(\xi)$ שניהם אורתוגונליים למרחב $T_x M$ ולכן

$$r_{x_1}(\xi) \times \dots \times r_{x_{n-1}}(\xi) = c(-f_{x_1}, \dots, -f_{x_{n-1}}, 1)$$

מהשוואה של הקואורדינטה האחרונה, נקבל

$$(-1)^{n-1} = c$$

מסקנה 1.5 קיבלנו כי

$$\Gamma(r_{x_1}(\xi), \dots, r_{x_{n-1}}(\xi)) = 1 + |\nabla f(\xi)|^2$$

2 אינטגרציה על יריעות

הגדרה 2.1 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, ותהי $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. התומך של f הוא

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$$

הגדרה 2.2 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר כי f בעלת תומך קומפקטי בתוך A אם $\text{supp}(f) \subseteq A$ קומפקטית.

הגדרה 2.3 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי f אינטגרבילית רימן (במובן של אינטגרל אמיתי) אם עבור $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

מתקיים כי \tilde{f} מתאפסת מחוץ לתיבה סופית Q כלשהי, וכן \tilde{f} אינטגרבילית על Q . במקרה זה נסמן

$$\int_A f(x) dx = \int_Q \tilde{f}(x) dx$$

משפט 2.4 (החלפת משתנים) תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $T : U \rightarrow T(U)$ דיפאומורפיזם ($T(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה). נתונה הפונקציה $f : T(U) \rightarrow \mathbb{R}$ עם תומך קומפקטי בתוך $T(U)$ ואינטגרבילית רימן. אזי

$$\int_{T(U)} f = \int_U (f \circ T) |J_T|$$

2.1 נפח k מימדי

בחדו"א 3 ראינו נפח של מקבילון הנוצר על ידי n ווקטורים v_1, \dots, v_n על ידי

$$|\det(v_1, \dots, v_n)|$$

נרצה לדון בנפח של מקבילון בתוך \mathbb{R}^n שנוצר על ידי הוקטורים $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

תכונות

1. נסתכל על

$$\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

אם $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, כלומר $v_i = (w_i, 0_{n-k})$, אזי הנפח של המקבילון שנפרש על ידי v_i הוא

$$|\det(w_1, \dots, w_k)|$$

2. אם $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ונתונה $P \in O(n)$ טרנספורמציה אורתוגונלית של \mathbb{R}^n אזי הנפח של המקבילון שנוצר על ידי Pv_1, \dots, Pv_k שווה לנפח של המקבילון הנוצר על ידי v_1, \dots, v_k .

שתי התכונות הללו מגדירות באופן יחיד נפח k מימדי - ניקח מקבילון, נסובב אותו כך שהוא בתוך $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, ונקבל את נפחו. נניח $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. נבחר העתקה אורתוגונלית $P \in O(n)$ כך שהוקטורים $Pv_i = (w_i, 0_{n-k}) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. נחשב:

$$\begin{aligned} |\det(w_1, \dots, w_k)| &= \sqrt{\det((w_1, \dots, w_k)(w_1, \dots, w_k)^T)} = \sqrt{\det(((w_i, w_j))_{i,j=1}^k)} = \\ &= \sqrt{\det(((Pv_i, Pv_j))_{i,j=1}^k)} = \sqrt{\det(((v_i, v_j))_{i,j=1}^\infty)} = \\ &= \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)} \end{aligned}$$

לכן לא צריך את העתקה העזר P , ופשוט נגדיר ככה נפח k מימדי.