

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

© ארזים

26 באפריל 2017

בשיעור שעבר דנו בשטח של של הספירה בתוך  $\mathbb{R}^3$ . כעת נרצה לחשב את השטח של כיפה ספירית, ונעשה זאת תבעזרת קואורדינטות פולריות. כיפה ספירית היא

$$S_\psi = \{(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \psi\}$$

כאשר  $0 < \psi < \pi$  כלשהי. נתבונן בפרמטריזציה

$$r(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

בעקרון הפרמטריזציה כרגע לא טובה, כי היא צריכה לבוא מתחום, אבל אפשר להסיר קבוצות זניחות ולקבל פרמטריזציה טובה, ולכן זה לא משנה לשטח. נצטמצם לתחום  $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \psi)$ . נחשב:

$$\begin{aligned}r_\varphi &= (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0) \\r_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta)\end{aligned}$$

כעת

$$\Gamma(r_\varphi, r_\theta) = \det \begin{pmatrix} (r_\varphi, r_\varphi) & (r_\varphi, r_\theta) \\ (r_\theta, r_\varphi) & (r_\theta, r_\theta) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin^2 \theta$$

לכן

$$v_2(S_\psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\psi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^\psi \sin \theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos \psi)$$

בשלב הזה היה דיבור ארוך על ספירות משיקות בשני מימדים ובשלושה מימדים. כמובן שזה כולל המון ציורים שאין לי דרך להכניס כאן. לסיכום - כמות המעגלים שאפשר להדביק שישיקו למעגל מסויים, כך שכולם משיקים לצמודים להם, היא לכל היותר 6 (אפשר 6, לא יותר). בשלושה מימדים אפשר 12. ניוטון התעניין בזה, אבל זה נפתר רק במאה שעברה.

### 0.1 נוסחת קו-שטח

(משפט פוביני עקום) ניזכר: אם יש לנו  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  על משטח שמוגדר כגרף

$$M = \{x \mid x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in W\}$$

כאשר  $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . ראינו כי עבור הפרמטריזציה הסטנדרטית  $r(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))$ , מתקיים

$$\Gamma = 1 + |\nabla\varphi|^2$$

לכן נקבל כי

$$v_{n-1}(M) = \int_W \sqrt{1 + |\nabla\varphi|^2} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

כעת אם  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  "טובה מספיק" אזי

$$\int_M f dS = \int_W f \sqrt{1 + |\nabla\varphi|^2} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

אם בנוסף  $M$  מוגדר כקבוצת האפסים של  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , כאשר  $\Phi$  רגולרית, אז ראינו כי

$$\Gamma = \frac{|\nabla\Phi|}{|\Phi_{x_n}|}$$

נניח כי  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום, ותהי  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה עבודה  $\nabla\Phi \neq 0$  בכל נקודה של  $V$ . נסמן  $\Phi(V) = (a, b)$  קטע כי  $V$  קשירה, פתוח כי הגרדיאנט לא מתאפס - משפט ההעתקה הפתוחה). אם  $c \in (a, b)$  נוכל להגדיר

$$M_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid \Phi(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

זו יריעה ממימד  $n - 1$ .

**משפט 0.1** (נוסחת קו-שטח) אם  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלית רימן עם תומך קומפקטי בתוך  $V$ , אזי

$$\int_V f(x) dx = \int_a^b dc \left( \int_{M_c} \frac{f(x)}{|\nabla\Phi(x)|} dS \right)$$

ניתן דוגמה: נתבונן בפונקציה  $f(x) = (x, v)$ , כאשר  $v \in \mathbb{R}^n$  קבוע. נרצה לדעת מה העובי של השכבה בה  $0 \leq f(x) \leq s$ , כאשר  $s > 0$ . נבדוק מתי  $(tv, v) = s$  - כמובן, כאשר  $t = \frac{s}{(v, v)}$ . לכן

$$tv = \frac{sv}{(v, v)}$$

ואז

$$d = |tv| = \left| \frac{sv}{(v, v)} \right| = \frac{s}{|v|}$$

במקרה הכללי, נוכל לכתוב

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + (\nabla\Phi(x), h) + o(h)$$

לכן אם נתעניין בעובי של  $c \leq \Phi \leq c + \Delta c$ , כאשר  $c = \Phi(x)$ , נקבל כי

$$0 \leq (\nabla\Phi(x), h) + o(h)$$

לכן העובי של השכבה בין  $M_c$  לבין  $M_{c+\Delta c}$  ליד  $x$  שווה לערך  $\frac{\Delta c}{|\nabla\Phi(x)|}$ .