

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

8 במאי 2017

### 1 נוסחת קו-שטח

**משפט 1.1** יהי  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום,  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  חלקה רגולרית על  $V$ . נסמן  $\phi(V) = (a, b)$ . תהי  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  עם תומך קומפקטי בתוך  $V$ . אזי

$$\int_V f(x) dx = \int_a^b \left( \int_{M_c} \frac{f(x)}{|\nabla \phi(x)|} dS \right) dc$$

כאשר

$$M_c = \phi^{-1}(c) \subseteq V$$

**הוכחה:** היינו באמצע. ראינו שתחת תנאי המשפט, לכל  $p \in V$  קיים כדור  $B(p, \delta_p) \subseteq V$  כך שהמשפט נכון בהנחה שמתקיים  $\text{supp}(f) \subseteq B(p, \delta_p)$ . כעת, נגדיר  $K = \text{supp} f \subseteq V$  וזה קומפקט. לכל  $x \in K$  יש לנו כדור  $B(x, \delta_x)$ . נסתכל בכיסוי

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{1}{2}\delta_x\right)$$

וניקח לא תת כיסוי סופי:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$$

קיים פריקו יחידה  $\varphi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $i$  מתקיים  $\text{supp} \varphi_i \subseteq B(x_i, \delta_{x_i})$  וכן

$$\sum_i \varphi_i = 1$$

על  $K$ , כאשר כל  $\varphi_i$  אינטגרלית רימן. אזי

$$\sum_i f \varphi_i = f$$

נגדיר  $f_i = f \varphi_i$ . לפי מה שראינו בשיעור שעבר,

$$\int_V f_i dx = \int_a^b \left( \int_{M_c} \frac{f_i}{|\nabla \phi|} \right) dc$$

ועל ידי סכימת האינטגרלי הללו נסיים. ■

**דוגמא**  $B = \{|x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , ואז לוקחים  $r > 0$  ומסמנים  $rB = \{|x| < r\}$ . תהי  $f : rB \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלית רימן. אזי

$$\int_{rB} f(x) dx = \int_0^r d\rho \int_{S_\rho} f(x) dS = \int_0^r \rho^{n-1} \int_{S_1} f(\rho(x)) dS(x)$$

כאשר  $S_\rho = \{|x| = \rho\}$ ,

$$\phi(x) = |x|$$

יש להסביר מדוע זה נכון - התומך לא קומפקטי. נסמך

$$A_\varepsilon = (r - \varepsilon)B \setminus \varepsilon B$$

זו טבעת קומפקטית. נגדיר  $f_\varepsilon = f \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon}$ . כעת,  $f_\varepsilon$  בעלת תומך קומפקטי,  $\phi : rB \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  רגולרית בכל נקודה וחלקה. מתקיימים תנאי המשפט ולכן

$$\int_{rB} f_\varepsilon = \int_{A_\varepsilon} f(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{rB} f(x) dx$$

$$\int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{S_1} f_\varepsilon(\rho x) dS(x) = \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \rho^{n-1} d\rho \int_{S_1} f(\rho x) dS(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{S_1} f(\rho(x)) dS(x)$$

## 2 משפט הדיברגנץ (Divergence Theorem)

**הגדרה 2.1** תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה. שדה וקטורי חלק  $F$  על  $U$  הוא בחירה חלקה של וקטור משיק  $F(x) \in T_x(U)$  לכל  $x \in U$ . יש זיהוי  $T_x U \cong \mathbb{R}^n$ , ואז אפשר לחשוב על  $F$  כעל העתקה  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . החלקות של  $F$  היא כפונקציה כזו.

**הגדרה 2.2** אם  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , שדה ווקטורי חלק  $F$  על  $A$  זאת בחירה חלקה של משיק  $F(x) \in T_x \mathbb{R}^n$  לכל  $x \in A$ . אפשר להסתכל על  $F$  כהעתקה  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ואז חלקות של  $F$  משמעה שקיימת קבוצה פתוחה  $A \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$  וקיימת הרחבה של  $F$  לפונקציה  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ . חלקה.

**דוגמאות** אם  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חלקה אזי  $\nabla f$  היא שדה וקטורי רציף. שדה מהירויות של נוזל - יש לנו נוזל באיזשהו מיכל, ובכל נקודת זמן נסתכל על וקטור המהירות של כל חלקיק. זה שדה המהירויות של הנוזל. כלומר,  $F(x, t) \in T_x U$  היא מהירות רגעית של חלקיק המים בנקודה  $x$  בזמן  $t$ . מתקיים

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

זו משוואה דיפרנציאלית. שדות כח (גרוויטציוני, חשמלי).

**הגדרה 2.3** יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  על משטח חלק שנתון ביחד עם בחירה רציפה של נורמל יחידה של  $M$ :

$$(T_x M)^\perp \ni N(x) \in T_x \mathbb{R}^n$$

יהי  $F$  שדה וקטורי על  $M$  (מספיק שיהיה רציף). השטף של  $F$  דרך  $M$  זה

$$\text{Flux}_F(M) = \int_M (F, N) \, dS$$

פירוש פיזיקלי - אם  $F$  הוא שדה מהירויות רגעי של זרימת מים בזמן  $t$  מסויים, השטף של  $F$  על  $M$  מודד נפח אינפיניטסימלי של מים שעברו דרך המשטח  $M$ . בקטע  $[t, t + \Delta t]$  עבר נפח  $\text{Flux}_F(M) \Delta t + o(\Delta t)$  של מים דרך  $M$ .

**הגדרה 2.4** יהי  $F$  שדה וקטורי חלק על  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . נסמן  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . הדיברגנץ של  $F$  זו פונקציה  $\text{div} F : U \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי

$$\text{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \text{Tr}(D_F)$$

**הערה 2.5** הדיברגנץ לא משתנה אחרי שינוי לינארי של קואורדינטות. אם  $F$  שדה וקטורי חלק,  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  העתקה לינארית הפיכה, נגדיר שדה וקטורי

$$G = P^{-1} F P$$

אזי

$$\text{div} G(x) = \text{tr}(D_G(x)) = \text{tr}(P^{-1} D_F(Px) P) = \text{tr}(D_F(Px)) = \text{div} F(Px)$$

**תרגיל** יהי  $F$  שדה וקטורי חלק, ותהי  $h$  פונקציה חלקה. אזי

$$\operatorname{div}(hF) = h\operatorname{div}F + (\nabla h, F)$$

$$\operatorname{div}(\nabla h) = \Delta h := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$$

האופרטור  $\Delta$  נקרא לפלסיאן.

**הגדרה 2.6** קבוצה פתוחה  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת חלקה אם לכל  $x \in \partial U$  קיימת סביבה  $W$  של  $x$  ודיפאומורפיזם  $\phi : W \rightarrow \phi(W)$  כך שמקתים

$$\phi(U \cap W) = \phi(W) \cap \{x_n < 0\}$$

נשים לב שבפרט במצב זה מתקיים

$$\phi(W \cap \partial U) = \phi(W) \cap \{x_n = 0\}$$

כלומר השפה של  $U$  היא יריעה חלקה ממימד  $n - 1$ .

**הגדרה 2.7** תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה חלקה. עבור  $x \in \partial U$ , נורמל יחידה  $N(x)$  ליריעה  $\partial U$  בנקודה  $x$  נקרא נורמל יחידה חיצוני אם לכל  $t > 0$  מספיק קטן,  $x + tN(x) \notin U$

**תרגיל** נניח כי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה חלקה. אזי לכל  $a \in \partial U$  קיים ויחיד נורמל יחידה חיצוני  $N(a)$  והוא תלוי באופן רציף בנקודה  $a$ .

**פתרון** ניקח סביבה  $W$  של  $a$  כמו בהגדרת קבוצה פתוחה חלקה. יש

$$\phi : W \rightarrow \phi(W)$$

עם

$$\phi(W \cap U) = \phi(W) \cap \{x_n < 0\}$$

נגדיר פונקציה  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  כך שעבור  $x \in W$  היא הקואורדינטה של  $x_n$  של  $\phi(x)$ . כעת  $\Sigma = W \cap \partial U = \{F = 0\}$ . כמובן  $\nabla F \neq 0$  על  $W$ . נגדיר

$$N(x) = \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$$

אזי  $|N(x)| = 1$ , וכן  $N(x) \perp T_x \Sigma$ . נרצה להוכיח שהוא נורמל יחידה חיצוני. מתקיים

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(x + tN(x)) = (\nabla F(x), N(x)) = \left( \nabla F(x), \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \right) = |\nabla F(x)| > 0$$

לכן אם  $t > 0$  מספיק קטן נקבל  $F(x + tN(x)) > 0$ , כי  $F(x) = 0$ . לכן  
 $\phi(U \cap W) = \phi(U) \cap \phi(W)$  אכן, והיא חיובית, אבל  $x + tN(x) \notin U$   
 $\phi(W) \cap \{x_n < 0\}$ . מסיבה דומה, אם  $t < 0$  קרוב מספיק לאפס,  
הוכחנו קיום יחידות של נורמל יחידה חיצוני - וברור מהגדרתו שהוא תלוי באופן  
רציף בנקודה  $x$ .