

פונקציות ממשיות

© ארזים

8 בינואר 2017

1 מכפלת מידות

1.1 מידת בורל לבג על \mathbb{R}^d

1.1.1 קיום

טענה 1.1 נניח כי $(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}), \mu_1)$ מידת בורל לבג, וכן $(\mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}), \mu_2)$ מידת בורל לבג. אזי

$$(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}), \mu_1 \times \mu_2)$$

היא מידת בורל לבג על המרחב $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

הוכחה: ראינו כי

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$$

ולכן $\mu_1 \times \mu_2$ מידת בורל על $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$. בנוסף,

$$(\mu_1 \times \mu_2)([0, 1]^{d_1+d_2}) = \mu_1([0, 1]^{d_1}) \cdot \mu_2([0, 1]^{d_2}) = 1 \cdot 1 = 1$$

יש לבדוק כעת אינווריאנטיות להזזות. די לבדוק אינווריאנטיות להזזות בוקטורים $u \in \mathbb{R}^{d_1}$, ובוקטורים $v \in \mathbb{R}^{d_2}$. נבדוק את הראשון: עבור $u \in \mathbb{R}^{d_1}$ נגדיר מידת בורל $(\mu_1 \times \mu_2)_u$ על $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ לפי

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A + u)$$

כאשר $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$. עבור מלבן מדיד $E \times F$ מתקיים

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \mu_2)_u(E \times F) &= (\mu_1 \times \mu_2)(E \times F + u) = (\mu_1 \times \mu_2)((E + u) \times F) = \\ &= \mu_1(E + u) \mu_2(F) = \mu_1(E) \mu_2(F) \end{aligned}$$

לאור יחידות מכפלת מידות נובע $(\mu_1 \times \mu_2)_u = (\mu_1 \times \mu_2)$, ולכן המידה אינווריאנטית להזזה ביחס לוקטור $u \in \mathbb{R}^{d_1}$. ■

מסקנה 1.2 לכל $n \geq 1$ קיימת מידת בורל לבג $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_n)$, ולכן גם מידת לבג $m_n = \overline{\mu}_n$.

1.1.2 פעולת טרנספורמציות לינאריות על \mathbb{R}^d

טענה 1.3 תהי $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ טרנספורמציה לינארית. אם $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג, אזי $T(E) \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג וכן

$$m(T(E)) = |\det T| m(E)$$

הוכחה: ראשית נניח כי T הפיכה. נסמן בתור μ את מידת בורל לבג על \mathbb{R}^d . נגדיר

$$\mu_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty] : E \rightarrow \mu_T(E) = \mu(T(E))$$

זו מידה, אינווריאנטית להזזות, וכן

$$\mu_T(T^{-1}([0, 1]^d)) = \mu([0, 1]^d) = 1$$

לכן $\mu \neq 0$, ומאחר והקבוצה $T^{-1}([0, 1]^d)$ מכילה קבוצה פתוחה, נובע כי μ סופית על קבוצות בורל חסומות. ממשפט היחידות, נובע שקיים $\nu_T > 0$ עבורו

$$\mu_T = \nu_T \mu$$

כלומר

$$\mu_T(E) = \nu_T \mu(E)$$

נשים לב כי ν_T נקבע באופן יחיד על פי השוויון לעיל עבור קבוצת בורל E יחידה עם $0 < \mu(E) < \infty$. מכאן,

$$\nu_{T_1 T_2} = \nu_{T_1} \cdot \nu_{T_2}$$

עבור שתי טרנספורמציות הפיכות. ברור כי $\nu_{Id} = 1$, ולכן

$$\nu_{T^{-1}} = \nu_T^{-1}$$

נבדוק את ν_T עבור T שהמטריצה שלה היא $\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, עבור $a > 0$. במקרה הזה:

$$\begin{aligned} \nu_T &= \nu_T \mu([0, 1]^d) = \mu_T([0, 1]^d) = \mu(T([0, 1]^d)) = \\ &= \mu([0, a] \times [0, 1]^{d-1}) = a \cdot 1 = a = |\det T| \end{aligned}$$

אם המטריצה של T היא $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, עבור $\alpha \neq 0$, אזי T, T^{-1} דומות ולכן

$$\nu_T = \nu_{T^{-1}} = \nu_T^{-1}$$

ולכן

$$\nu_T = 1 = |\det T|$$

אם T אורתוגונלית אזי $T(B(0,1)) = B(0,1)$ ולכן $\nu_T = 1 = |\det T|$. כל טרנספורמציה לינארית הפיכה ניתן לכתוב כמכפלה של שלושת סוגי הטרנספורמציות האלה, ולכן נקבל

$$\mu(T(E)) = |\det T| \mu(E)$$

כעת, תהי T הפיכה ותהי E מדידה לבג. יש פירוק זר $E = A \cup N$, כאשר A בורל, $N \subseteq B$ כאשר B בורל ממידה 0. אז מתקיים $m(E) = \mu(A)$. אזי

$$\begin{aligned} \mu(TB) &= 0 \\ TN &\subseteq TB \\ TE &= TA \cup TN \end{aligned}$$

TA, TB בורל, ולכן TE מדידה לבג, וכן

$$m(TE) = \mu(TA) = |\det T| \mu(A) = |\det T| m(E)$$

לבסוף, נניח כי T לא הפיכה. אזי $\det T = 0$. די להוכיח $m(T(\mathbb{R}^d)) = 0$. אכן, יש טרנספורמציה לינארית S הפיכה עברה

$$ST(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$$

ואז

$$|\det S| m(T(\mathbb{R}^d)) = m(ST(\mathbb{R}^d)) = m(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = 0$$

■ $m(T(\mathbb{R}^d)) = 0$ ולכן שכן S הפיכה, ולכן $\det S \neq 0$

מסקנה 1.4 תהי $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ טרנספורמציה לינארית הפיכה. אזי

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) dx = \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy$$

לפי מידת לבג. כאשר $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ מדידה לבג, או $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ אינטגרבילית לבג.

הוכחה: די לבדוק את המקרה הראשון, שכן בשני נפצל לחלק ממשי ומדומה, ואז לשלילי וחיובי.

בעזרת קירוב $f \nearrow s_n$ על ידי פשוטות, די להניח כי $f = s$ פשוטה, ולכן די להניח כי $f = \chi_E$ עבור $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (זהו סימון לקבוצות המדידות לבג שנשתמש בו הרבה). אז:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(Tx) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{T^{-1}E}(x) dx = m(T^{-1}(E)) = |\det T|^{-1} m(E) = |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(y) dy$$

■

1.2 משפט טונלי

משפט 1.5 (טונלי) יהיו (X, Σ_x, μ) , (Y, Σ_y, λ) מרחב מידה סיגמא סופיים. תהי $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה לפי $\Sigma_x \otimes \Sigma_y$. אזי מתקיים:

1. $y \in Y$ מדידה לכל $x \rightarrow f(x, y) \in [0, \infty]$

2. $x \in X$ מדידה לכל $y \rightarrow f(x, y) \in [0, \infty]$

3. $y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x) \in [0, \infty]$ מדידה.

4. $x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\lambda(y) \in [0, \infty]$ מדידה.

5. מתקיים

$$\int_{X \times Y} f d\mu \times \lambda = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\lambda(y) \right) d\mu(x)$$

6. מתקיים

$$\int_{X \times Y} f d\mu \times \lambda = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\lambda(y)$$

הוכחה: אם $f = \chi_E$ עבור $E \in \Sigma_x \otimes \Sigma_y$ ראינו זאת כבר: אכן, לכל $x \in X$ מתקיים

$$\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y)$$

וראינו כי $E_x \in \Sigma_y$ ולכן הפונקציה

$$y \rightarrow \chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y)$$

מדידה. בנוסף

$$\int_Y \chi_E(x, y) d\lambda(y) = \int_Y \chi_{E_x}(y) d\lambda(y) = \lambda(E_x)$$

וראינו כי הפונקציה $x \rightarrow \lambda(E_x)$ מדידה. לכן סעיפים 2, 4 נכונים במקרה הזה, וראינו גם כי

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E dy \right) dx = \int_X \lambda(E_x) dx$$

לפי הגדרה מתקיים

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_{X \times Y} \chi_E d(\mu \times \lambda)$$

לכן גם סעיף 5 נכון. הוכחת 1, 3, 6 דומה. מכאן נובע המשפט גם לפונקציות פשוטות $s \geq 0$. כעת, תהי $f \geq 0$ כלשהי. ניקח $s_n \nearrow f$ פשוטות. לכל $x \in X$ מתקיים

$$s_n(x, \cdot) \nearrow f(x, \cdot)$$

ולכן $y \rightarrow f(x, y)$ מדידה, וסעיף 2 נכון. לפי משפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים לכל $x \in X$:

$$\int_Y s_n(x, y) dy \nearrow \int_Y f(x, y) dy$$

ובפרט סעיף 4 נכון. לבסוף, סעיף 5 נכון כי:

$$\int_X \left(\int_Y s_n(x, y) dy \right) dx \nearrow \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx$$

כמו כן ידוע כי

$$\int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \lambda) \nearrow \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda)$$

■

ולכן גם 5 נכון. הוכחת 1,3,6 דומה.

1.3 משפט פוביני

משפט 1.6 (פוביני) יהיו (X, Σ_X, μ) , (Y, Σ_Y, λ) שני מרחב מידה סיגמא סופיים, ותהי $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ אינטגרבילית ביחס למידה $\mu \times \lambda$. אזי הפונקציות $x \rightarrow f(x, y)$, $y \rightarrow f(x, y)$ הן מדידות לכל $x \in X, y \in Y$ בהתאמה. נסמן בתור $M \subseteq Y$ (בהתאמה $N \subseteq X$) את אוסף הנקודות $y \in Y$ (בהתאמה $x \in X$) עבורן הפונקציה $x \rightarrow f(x, y)$ (בהתאמה $y \rightarrow f(x, y)$) אינה אינטגרבילית. אזי M (בהתאמה N) מדידה וזניחה. נגדיר את הפונקציה $x \rightarrow \int_Y f(x, y) dy$ להיות 0 על M , ואת $y \rightarrow \int_X f(x, y) dx$ להיות 0 על N . אזי הפונקציות הללו אינטגרביליות אחרי השינוי, ומתקיים

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_{X \times Y} f d\mu \times \lambda = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy$$

הוכחה: על ידי מעבר לחלק ממשי וחלק מרוכב, מספיק להניח כי f ממשית. אם $f \geq 0$ המשפט נובע ממשפט טונלי. נפרק $f = f_+ - f_-$. אזי אינטגרביליות $f(x, \cdot)$ לכל $x \in X$ הפונקציה $f(x, \cdot) = f_+(x, \cdot) - f_-(x, \cdot)$ מדידה, וכמו כן, אבל מהמקרה אינטגרביליות אם ורק אם $y \rightarrow f_+(x, y), y \rightarrow f_-(x, y)$ אינטגרביליות. אבל מהמקרה של $f \geq 0$ נובע כי אוסף אותם x בהן פונקציות אלה לא אינטגרבילי הוא קבוצה מדידה וזניחה. לכן N מדידה וזניחה, ובאופן דומה גם M . כמו כן

$$\int_Y f(x, y) dy = \int_Y f_+(x, y) dy - \int_Y f_-(x, y) dy$$

מהמקרה בו $f \geq 0$ נובע כי צד ימין מתאר פונקציה מדידה של $x \in N^c$ ואינטגרבילית על N^c . לכן אחרי התיקון (כלומר איפוס על M), הפונקציה בצד שמאל מדידה ואינטגרבילית, והאינטגרל לא משתנה. לבסוף:

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) \chi_{N^c} dx = \int_X \left(\int_Y f_+ dy \right) \chi_{N^c} dx - \int_X \left(\int_Y f_- dy \right) dx = \\ &= \int_X \left(\int_Y f_+ dy \right) dx - \int_X \left(\int_Y f_- dy \right) dx = \int_{X \times Y} f_+ - \int_{X \times Y} f_- = \int_{X \times Y} f \end{aligned}$$

■

יישום אופייני

נניח כי $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה וכי

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx < \infty$$

אזי לפי טונלי לגבי $|f|$, נובעי כי

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \lambda) < \infty$$

ולכן f אינטגרבילית לפי $\mu \times \lambda$ וניתן להשתמש בפוביני:

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda)$$

1.4 השלמה של מכפלת מידות לבג.

נסמן m_i את מידת לבג על \mathbb{R}^i , μ_i את מידת בורל לבג על \mathbb{R}^i . אזי $m_i = \overline{\mu_i}$. כמו כן, ראינו כי

$$\mu_{i+j} = \mu_i \times \mu_j \quad (1)$$

לכן

$$m_{i+j} = \overline{\mu_{i+j}} = \overline{\mu_i \times \mu_j} \quad (2)$$

טענה 1.7 מתקיים

$$m_{i+j} = \overline{m_i \times m_j} \quad (3)$$

הוכחה: ראשית,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{i+j}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^j) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^j) \quad (4)$$

כמו כן,

$$m_i \times m_j \Big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)} = \mu_i \times \mu_j \quad (5)$$

שכן ערך צד שמאל עבור כל מלבן מדיד $A \times B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$ הוא

$$(m_i \times m_j)(A \times B) = m_i(A) m_j(B) = \mu_i(A) \mu_j(B) = (\mu_i \times \mu_j)(A \times B)$$

וכעת ממשפט יחידות מכפלת מידות, נקבל את השוויון.
 כעת, תהי $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$ אזי יש $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{i+j})$ וכן $N \subseteq B$ כך שמתקיים $E = A \cup N$ (זר) וכן $\mu_{i+j}(B) = 0$ ואז $\mu_{i+j}(A) = \mu_{i+j}(E)$. נובע מתוך (4) כי $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^j)$, ולפי (1), (5) נובע

$$\begin{aligned} m_i \times m_j(B) &= 0 \\ m_{i+j}(E) &= (m_i \times m_j)(A) \end{aligned}$$

מכאן נובע כי E מדידה ביחס להשלמה $\overline{m_i \times m_j}$ וכן כי

$$m_{i+j}(E) = m_i \times m_j(A) = \overline{m_i \times m_j}(E)$$

עד כאן ראינו כי

$$m_{i+j} = \overline{m_i \times m_j} \Big|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})} \quad (6)$$

נותר להוכיח שאם Q מדידה לפי $\overline{m_i \times m_j}$, אזי $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$. ראשית נראה כי

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j}) \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^j) \quad (7)$$

אכן, תהי $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^i)$. אזי יש $M, N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^i)$ עם $M \subseteq F \subseteq N$, $\mu(M \setminus N) = 0$.
 לכן

$$M \times \mathbb{R}^j \subseteq F \times \mathbb{R}^j \subseteq N \times \mathbb{R}^j$$

וכן

$$\mu_{i+j}((M \times \mathbb{R}^j) \setminus (N \times \mathbb{R}^j)) = \mu_{i+j}((M \setminus N) \times \mathbb{R}^j) = \mu_i(M \setminus N) \times \mu_j(\mathbb{R}^j) = 0$$

לכן $F \times \mathbb{R}^j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$. באופן דומה אם $F' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^j)$ אזי $\mathbb{R}^i \times F' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$,
 ולכן גם

$$F \times F' = (F \times \mathbb{R}^j) \cap (\mathbb{R}^i \times F') \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$$

ולכן נובע (7). לבסוף, תהי Q מדידה לפי $\overline{m_i \times m_j}$. אזי יש $H \subseteq Q \subseteq K$ עם $H, K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^j)$ וכן $(m_i \times m_j)(K \setminus H) = 0$. מתוך (7) נקבל

$$H, K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$$

ומתוך (6) נקבל

$$m_{i+j}(K \setminus H) = \overline{m_i \times m_j}(K \setminus H) = m_i \times m_j(K \setminus H) = 0$$

ולכן Q מדידה לפי ההשלמה של m_{i+j} , אבל m_{i+j} שלמה ולכן Q מדידה לפי m_{i+j} .
 כלומר $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})$.

לאור זה ניתן משפטים:

משפט 1.8 יהיו (X, Σ_x, μ) , (Y, Σ_y, λ) שתי מידות שלמות וסיגמא סופיות. תהי $(X \times Y, \overline{\Sigma_x \otimes \Sigma_y}, \overline{\mu \times \lambda})$ תהי מידת השלמת המכפלה.

עבור $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ (בהתאמה $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$) מדידה (אינטגרבילית) ביחס לסיגמא אלגברה $\overline{\Sigma_x \otimes \Sigma_y}$ (למידה $\overline{\mu \times \lambda}$), מתקיים:

1. $x \rightarrow f(x, y)$ מדידה (אינטגרבילית) כמעט לכל y , $y \rightarrow f(x, y)$ מדידה (אינטגרבילית) כמעט לכל x .

2. הפונקציות

$$x \rightarrow \int_Y f(x, y) \, dy$$

$$y \rightarrow \int_X f(x, y) \, dx$$

מוגדרות כמעט בכל מקום ומדידות (אינטגרביליות).

3.

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{X \times Y} f \, d\overline{\mu \times \lambda} = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, dx \right) dy$$

הוכחה: המקרה של פונקציה מרוכבת נובע מהמקרה של פונקציה לתוך $[0, \infty]$ על ידי חלוקה לחלק ממשי ומרוכב, ואז שלילי וחיובי.

לכן נניח כי $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה לפי $\overline{\Sigma_x \otimes \Sigma_y}$. ראינו שקיימת $g : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה לפי $\Sigma_x \otimes \Sigma_y$ וכך שמתקיים $f = g$ כמעט בכל מקום ביחס למידה $\mu \times \lambda$. המשפט נכון עבור g (גם בלי התניית "כמעט בכל מקום" בסעיפים 1,2). תהי $N \in \Sigma_x \otimes \Sigma_y$ כד שמתקיים $(\mu \times \lambda)(N) = 0$ וכן $\{f \neq g\} \subseteq N$ ראינו כי לכל $y \in Y$, $N^y \in \Sigma_x$ מאחר ומתקיים

$$\int_Y \mu(N^y) \, d\lambda(y) = (\mu \times \lambda)(N^y) = 0$$

נובע שמכעט לכל $y \in Y$, $\mu(N^y) = 0$, ולכן לכל $y \in Y$

$$\{x \in X \mid f(x, y) \neq g(x, y)\} \subseteq N^y$$

ולכן כמעט לכל y הפונקציה $g(\cdot, y)$, $f(\cdot, y)$ שוות כמעט בכל מקום לפי μ . מאחר שזו מידה שלמה, נובע שמעט לכל $y \in Y$ הפונקציה $x \rightarrow f(x, y)$ מדידה וכי $x \rightarrow g(x, y)$ מדידה, ולכן החלק הראשון של 1 נכון. החלק השני דומה. כמו כן נובע כי כמעט לכל $y \in Y$ מתקיים

$$\int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x, y) d\mu(x)$$

מאחר והפונקציה $y \rightarrow \int_X g(x, y) d\mu(x)$ מדידה, ומאחר והמידה λ שלמה, נובע כי $y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x)$ מדידה. לכן החלק השני של 2 נכון, והחלק השני דומה. לבסוף, נובע מנכונות המשפט עבור g :

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy = \int_Y \left(\int_X g(x, y) dx \right) dy = \int_{X \times Y} g d(\mu \times \lambda) = \int_{X \times Y} g d(\overline{\mu \times \lambda}) = \int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \times \lambda})$$

■ ולכן החלק הימני של 3 נכון, והחלק השני נובע באופן דומה.

2 מרחבי L^p (על מרחב מידה כללי)

הגדרה 2.1 מינוח $1 \leq p, q \leq \infty$ נקראים צמודים אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. המקרים החשובים: $p = \infty, q = 1$, $p = 1, q = \infty$, $p = q = 2$

2.1 אי שוויונות

משפט 2.2 (אי שוויון יאנג) יהי $1 < p, q < \infty$ צמודים. אזי לכל $\alpha, \beta \geq 0$ מתקיים

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

הוכחה: בעזרת רציפות אפשר להניח כי p, q רציונאליים. נסמן

$$\frac{1}{p} = \frac{n}{n+m}, \quad \frac{1}{q} = \frac{m}{n+m}$$

ונסמן

$$b = \beta^q = \beta^{\frac{n+m}{m}}$$

$$a = \alpha^p = \alpha^{\frac{n+m}{n}}$$

ואז

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{n}{n+m}}b^{\frac{m}{n+m}} = \sqrt[n+m]{a^n b^m} \leq \frac{na + mb}{n+m} = \\ &= \frac{n}{n+m}a + \frac{m}{n+m}b = \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\end{aligned}$$

■

כעת, יהי (X, Σ, μ)

משפט 2.3 (אי שוויון הלדר) יהיו $1 < p, q < \infty$ צמודים, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות. אזי

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

נשים לב שאם $t > 0$ אזי $\infty^t = \infty$.

הוכחה: אם $\int f^p = 0$ אז $f = 0$ כמעט בכל מקום וצד שמאל הוא 0, והשוויון טריויאלי. לכן נניח $\int f^p > 0$, $\int g^q > 0$. אם $\int f^p = \infty$, אזי מאחר ומתקיים $\int g^q > 0$ נקבל כי צד ימין הוא ∞ , והאי שוויון טריויאלי. לכן נניח $\int f^p, \int g^q < \infty$. נסמן

$$\begin{aligned}A &= \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ B &= \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

ונסמן $F = \frac{f}{A}$, $G = \frac{g}{B}$. ואז נקבל

$$\int F^p = 1 = \int G^q$$

לכן

$$\frac{1}{AB} \int fg = \int FG \leq \int \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

לכן

$$\int fg \leq AB = \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

■

משפט 2.4 (אי שוויון מינקובסקי) יהי $1 \leq p < \infty$ וכן $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות. אזי

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

הוכחה: אם $p = 1$ ידוע שקיים שוויון. לכן נניח כי $1 < p < \infty$, ויהי $1 < q < \infty$ הצמוד. אפשר להניח $\int f^p, \int g^p < \infty$ כי אחרת הכל טריוויאלי. מתקיים

$$\left(\frac{f+g}{2} \right)^p \leq \frac{f^p + g^p}{2}$$

כי הפונקציה x^p קמורה. לכן

$$\int (f+g)^p \leq 2^{p-1} \int f^p + g^p < \infty$$

לפי הדרך נקבל

$$\int f (f+g)^{p-1} \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

אבל $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, כלומר $pq = p+q$, ולכן $pq = p+q - q = p+q - q = p$, לכן $(p-1)q = pq - q = p - q = p - q$, לכן

$$\int f (f+g)^{p-1} \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

באופן דומה:

$$\int g (f+g)^{p-1} \leq \left(\int g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

נחבר ונקבל

$$\int (f+g)^p \leq \left(\left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int (f+g)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

אם $\int (f+g)^p = 0$ אז האי שוויון טריוויאלי, ולכן נניח כי הוא חיובי. נקבל:

$$\left(\int (f+g)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int (f+g)^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

■

הגדרה 2.5 נסמן לכל $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה ולכל $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

מסקנה 2.6 אם $1 < p, q < \infty$ צמודים אזי

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

אם $1 \leq p < \infty$ אזי

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

הערה 2.7 מתקיים גם לכל $\lambda \in \mathbb{C}, 1 \leq p < \infty$:

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

$$\left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 2.8 מרחב נורמי הוא זוג $(V, \|\cdot\|)$ כאשר V מרחב וקטורי מעל \mathbb{C} (או \mathbb{R}) וכן $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה כך שמתקיים:

1. $u = 0 \iff \|u\| = 0$

2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$