

פונקציות ממשיות

© ארזים

22 בינואר 2017

1 נקודות לבג

1.1 פונקציה מקסימלית גבולית

הגדרה 1.1 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה מדידה לבג. נסמן

$$f^*(x) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| du := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{0 < t < \delta} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| du \right)$$

למה 1.2 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, אזי לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$m^* (\{x \in \mathbb{R} \mid f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1 = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f|$$

הוכחה: די להוכיח שלכל n שלם מתקיים

$$m^* (\{x \in (n, n+1) \mid f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_n^{n+1} |f(u)| du$$

אכן, אם הוכחנו זאת, נובע כי

$$\begin{aligned} m^* (f^* > \alpha) &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^* (\{x \in (n, n+1) \mid f^*(x) > \alpha\}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^* (\{n\}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f| = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f| \end{aligned}$$

נקבע כעת n . נסמן

$$E = \{x \in (n, n+1) \mid f^*(x) > \alpha\}$$

נשמך בתור Φ את אוסף הקטעים מהצורה $[x-t, x+t] \subseteq (n, n+1)$ עם $t > 0$, ושעבורם

$$\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| du > \alpha$$

זהו כיסוי ויטלי של E . יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. קיימים $I_1, \dots, I_k \in \Phi$ זרים בזוגות, כך שמתקיים

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k I_j \right) \right) \leq \varepsilon$$

כעת, מאחר ומתקיים $I_j \in \Phi$ לכל j , מתקיים

$$l(I_j) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{I_j} |f|$$

מאחר והם זרים בזוגות נקבל

$$m \left(\bigcup_{j=1}^k I_j \right) = \sum_{i=1}^k l(I_i) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \int_{I_i} |f| = \frac{1}{\alpha} \int_{\bigcup_j I_j} |f| \leq \frac{1}{\alpha} \int_n^{n+1} |f|$$

לבסוף נקבל כי

$$m^*(E) \leq m \left(\bigcup_{j=1}^k I_j \right) + m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k I_j \right) \right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_n^{n+1} |f| + \varepsilon$$

■ קטן כרצוננו, ולכן נקבל את אי השוויון שרצינו.

הערה 1.3 לפי אי שוויון צ'בישב, אם φ אינטגרבילית, אזי

$$m^* (\{|\varphi| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi\|_1$$

1.2 נקודות לבג

הגדרה 1.4 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ויהי $x \in \mathbb{R}$. היא נקודת לבג של f אם מתקיים

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u) - f(x)| du = 0$$

תכונה אם f רציפה בנקודה x , אזי נקודת לבג של f .

אכן, לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עבורו אם $x - \delta \leq u \leq x + \delta$ אזי $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$ ולכן אם $0 < t < \delta$, מתקיים

$$\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f - f(x)| \leq \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} \varepsilon = \varepsilon$$

1.5 הערה ההגדרה תלוייה בערך של f בנקודה x .

משפט 1.6 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. אזי כמעט כל נקודה $x \in \mathbb{R}$ היא נקודת לבג של f .

הוכחה: נגדיר פונקציה $f^{**} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ על ידי

$$f^{**}(x) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u) - f(x)| du$$

נרצה להראות כי $f^{**} = 0$ כמעט בכל מקום. נשים לב כי מתקיים

$$\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u) - f(x)| du \leq \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| du + |f(x)|$$

ולכן נקבל כי

$$f^{**}(x) \leq f^*(x) + |f(x)|$$

מכאן, לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$m^* (\{f^{**} > 2\alpha\}) \leq m^* (\{f^* > \alpha\}) + m^* (\{|f| > \alpha\}) \leq \frac{2}{\alpha} \|f\|_1$$

כמו כן נשים לב כי אם $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית נוספת, אזי

$$(f \pm g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$$

נובע מזה שמתקיים

$$|(f \pm g)(u) - (f \pm g)(x)| \leq |f(u) - f(x)| + |g(u) - g(x)|$$

כמו כן, אם $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הציפה אזי $h^{**} = 0$.
 לכן, אם g הציפה נקבל

$$(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**} = f^{**} = ((f + g) - g)^{**} \leq (f + g)^{**} + g^{**} = (f + g)^{**}$$

מכאן נקבל כי

$$(f + g)^{**} = f^{**}$$

לבסוף, יהי $\varepsilon > 0$. קיימת פונקציה רציפה ואינטגרבילית כך שמתקיים $\|f + g\|_1 < \varepsilon$.
 כעת

$$m^*(f^{**} > 2\alpha) = m^*((f + g)^{**} > \alpha) \leq \frac{2}{\alpha} \|f + g\|_1 < \frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

לקחנו $\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*(f^{**} > 2\alpha) = 0$$

גם $\alpha > 0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*(f^{**} > 0) = 0$$

■

ולכן $f^{**} = 0$ כמעט בכל מקום.

1.3 גזירות האינטגרל

משפט 1.7 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ויהי $a \in \mathbb{R}$ כלשהו (או $a = \pm\infty$). אזי כמעט לכל x ממשי מתקיים

$$\left(\frac{d}{dt} \int_a^t f(u) du \right) (x) = f(x)$$

כתיבה שקולה:

$$\left(\int_a^t f(u) du \right)' = f$$

כמעט בכל מקום.

הוכחה: די להראות שהשוויון מתקיים לכל x שהוא נקודת לבג של f . לגבי נגזרת מימין:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\int_a^{x+t} f - \int_a^x f}{t} - f(x) \right| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{t} \left(\int_x^{x+t} f(u) \, du - \int_x^{x+t} f(x) \, du \right) \right| \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u) - f(x)| \, du \leq 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u) - f(x)| \, du = 0 \end{aligned}$$

משמאל:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{-t} \left(\int_a^{x-t} f - \int_a^x f \right) - f(x) \right| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{t} \int_{x-y}^x f(u) \, du - f(x) \right| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{t} \left(\int_{x-t}^x f(u) \, du - \int_{x-t}^x f(x) \, du \right) \right| \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_{x-t}^x |f(u) - f(x)| \, dx \leq 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u) - f(x)| \, du = 0 \end{aligned}$$

■

ולכן סיימנו.

2 פונקציות מונוטוניות, פונקציות רציפות בהחלט ופונקציות בעלות השתנות חסומה

2.1 פונקציות מונוטוניות

הערה 2.1 בפרק זה, פונקציה מונוטונית תהיה פונקציה מונוטונית עולה חלש.

הגדרה 2.2 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית. לכל $a < x < b$ נסמן

$$(f'_+) (x) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in [0, \infty]$$

$$(f'_-) (x) = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in [0, \infty]$$

ברור כי גזירה בנקודה x אם ורק אם $(f'_+) (x) = (f'_-) (x) < \infty$. כמו כן, $f'_- \leq f'_+$.

טענה 2.3 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית. אזי לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$m^* (\{x \in (a, b) \mid f'_+ (x) \geq \alpha\}) \leq \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}$$

הוכחה: נסמן

$$E = \{x \in (a, b) \mid f'_+(x) \geq \alpha\}$$

יהי $0 < \beta < \alpha$ כלשהו. לכל $x \in E$ קיימים קטעים $c < d \subseteq (a, b)$ עם $x \in [c, d]$ וכן קטנים כרצוננו וכך שמתקיים

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} \geq \beta$$

נתיחס לאוסף Φ של קטעים $[c, d] \in (a, b)$ עם $c < d$ וכן

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} \geq \beta$$

אזי Φ כיסוי ויטלי של E . יהי $\varepsilon > 0$. לפי למת הכיסוי קיימים קטעים $I_1, \dots, I_n \in \Phi$ כך זרים בזוגות המקיימים

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n I_j \right) \right) < \varepsilon$$

נסמן קטעים אלה בתור $I_j = [c_j, d_j]$ ואז

$$\frac{f(d_j) - f(c_j)}{d_j - c_j} \geq \beta$$

כמו כן, מאחר והקטעים זרים בזוגות, וכן f מונוטונית, נובע כי

$$\sum_{j=1}^n (f(d_j) - f(c_j)) \leq f(b) - f(a)$$

לבסוף,

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leq m^* \left(\bigcup_{j=1}^n I_j \right) + m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n I_j \right) \right) \leq \sum_{j=1}^n (d_j - c_j) + \varepsilon \leq \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^n (f(d_j) - f(c_j)) + \varepsilon \leq \\ &\leq \frac{f(b) - f(a)}{\beta} + \varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*(E) \leq \frac{f(b) - f(a)}{\beta}$$

וכעת, β קרוב כרצוננו אל α , ולכן

$$m^*(E) \leq \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}$$

■

כמו שרצינו.

הערה 2.4 על ידי לקיחת $\alpha = 1, 2, \dots$ נובע כי

$$m^*(f'_+ = \infty) = 0$$

משפט 2.5 (לבג) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונטונית. אזי f גזירה על $[a, b]$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: די להוכיח שלכל זוג $0 < \alpha < \beta < \infty$ של מספרים רציונאליים, הקבוצה

$$E = E_{\beta, \alpha} = \{x \in (a, b) \mid f'_-(x) < \beta < \alpha < f'_+(x)\}$$

היא ממידה 0.

יהי $\varepsilon > 0$. תהי $E, G \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $m(G) \leq m^*(G) + \varepsilon$. יהי Φ אוסף הקטעים $[c, d] \subseteq G$ עם $c < d$ ועם

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} < \beta$$

מאחר ומתקיים $f'_- < \beta$ על E , נובע כי Φ כיסוי ויטלי של E . תהי $\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^n$ תת קבוצה סופית של קטעים זרים זה לזה עם

$$m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]\right)\right) < \varepsilon$$

נסתכל על צמצום f על כל $[c_k, d_k]$. מאחר ומתקיים $f'_+ > \alpha$ על E , נובע מהטענה הקודמת

$$m^*(E \cap [c_k, d_k]) \leq \frac{f(d_k) - f(c_k)}{\alpha}$$

וזאת לכל k . מצד שני, מהגדרת Φ מתקיים לכל k

$$\frac{f(d_k) - f(c_k)}{d_k - c_k} < \beta$$

לכן נקבל כי

$$m^*(E \cap [c_k, d_k]) \leq \frac{f(d_k) - f(c_k)}{\alpha} \leq \frac{\beta}{\alpha} (d_k - c_k)$$

וגם זה לכל k . לבסוף:

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leq m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]\right)\right) + m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]\right)\right) \leq \sum_{k=1}^n m^*(E \cap [c_k, d_k]) + \varepsilon \leq \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) + \varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} m\left(\bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]\right) + \varepsilon \leq \frac{\beta}{\alpha} m(G) + \varepsilon \leq \frac{\beta}{\alpha} (m^*(E) + \varepsilon) + \varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*(E) \leq \frac{\beta}{\alpha} m^*(E)$$

ולכן $0 \leq m^*(E) < \infty$ וכן $0 < \beta < \alpha$

$$m^*(E) = 0$$

■

משפט 2.6 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונטונית (עולה) אזי $f' \geq 0$ (מוגדרת כמעט בכל מקום), אינטגרבילית על $[a, b]$, וכן

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$$

הוכחה: $f' \geq 0$ מידי. נרחיב את f להיות $f(b)$ לערכי x שגדולים יותר מאשר b . לכל n , נגדיר פונקציה $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$g_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \geq 0$$

אזי $g_n \rightarrow f'$ כמעט בכל מקום, ובפרט f' מדידה לבג.

לפי הלמה של פטו (אחרי איפוס f' וכן g_n בנקודות בהן f' אינה מוגדרת) נקבל

$$\begin{aligned} \int_a^b f' &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^b f \right) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \right) \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a) dx \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (f(b) - f(a)) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

■

2.2 פונקציות רציפות בהחלט

הגדרה 2.7 פונקציה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט על $[a, b]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ עבורו לכל סדרת קטעים $(x_i, x'_i) \subseteq [a, b]$ שהם זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) < \delta$$

מתקיים

$$\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

הערה 2.8 אם f רציפה בהחלט על $[a, b]$ אזי f רציפה על $[a, b]$.

הערה 2.9 אם f, g רציפות בהחלט על $[a, b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, אזי $c_1 f + c_2 g$ רציפה בהחלט על $[a, b]$.

דוגמה תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אזי הפונקציה

$$[a, b] \ni x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

רציפה בהחלט.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. ראינו שקיים $\delta > 0$ כך שאם $E \subseteq [a, b]$ מדידה ומקיימת $m(E) < \delta$ אזי

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

נניח $a \leq x_1 < x'_1 \leq x_2 < x'_2 \leq \dots \leq x_n < x'_n \leq b$ מקיימים

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) < \delta$$

נסמן

$$E = \bigcup_{i=1}^n (x_i, x'_i)$$

אזי $m(E) < \delta$, ולכן

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

כעת,

$$\left| \int_a^{x'_i} f - \int_a^{x_i} f \right| = \left| \int_{x_i}^{x'_i} f \right| \leq \int_{x_i}^{x'_i} |f| = \int_{(x_i, x'_i)} |f|$$

לכן

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_a^{x'_i} f - \int_a^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{(x_i, x'_i)} |f| = \int_E |f| + \varepsilon$$

■

בהמשך, נוכיח כי אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בהחלט אזי קיימות $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות בהחלט ומונוטוניות עבורן $f = g - h$.

מסקנה 2.10 אם f רציפה בהחלט על $[a, b]$ אזי f גזירה כמעט בכל מקום על $[a, b]$.

טענה 2.11 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בהחלט על $[a, b]$. אם $f' = 0$ כמעט בכל מקום אזי f קבועה על $[a, b]$.

הוכחה: די להוכיח כי $f(a) = f(c)$ לכל $a \leq c \leq b$. על ידי החלפת $[a, b]$ בקטע $[a, c]$, מספיק להוכיח כי $f(b) = f(a)$.

תהי $\{a, b\} \subseteq N \subseteq [a, b]$ קבוצה מדידה עם $m(N) = 0$ וכך שלכל $x \in [a, b] \setminus N$, $f'(x) = 0$ וכן $f'(x) = 0$ נסמן $E = [a, b] \setminus N$. אזי $m(E) = b - a$ וכל $x \in E$ מתקיים $f'(x) = 0$.

יהיו $\eta, \varepsilon > 0$ כלשהם. יהי $\delta > 0$ עבורו אם זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^l (x'_i - x_i) < \delta$$

אזי מתקיים

$$\sum_{i=1}^l |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

יהי Φ אוסף הקטעים $[x, y] \subseteq (a, b)$ עם $x < y$, כך שמתקיים

$$|f(y) - f(x)| < \eta |y - x|$$

אזי Φ כיסוי ויטלי של E . מלמת הכיסוי נובע שקיימים קטעים $[x_i, y_i]$ זרים בזוגות עם

$$m\left(E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

מאחר ומתקיים

$$m([a, b] \setminus E) = m(N) = 0$$

נקבל

$$m\left([a, b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

על ידי סידור אינדקסי הקטעים, אפשר להניח כי

$$a =: y_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n < x_{n+1} := b$$

אזי

$$\sum_{i=0}^{n+1} (x_{i+1} - y_i) = m\left([a, b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

ומכאן

$$\sum_{i=0}^{n+1} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| < \varepsilon$$

אבל $[x_i, y_i] \in \Phi$ ולכן לכל i מתקיים

$$|f(y_i) - f(x_i)| < \eta |y_i - x_i|$$

ובסך הכל נקבל

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= |f(x_{n+1}) - f(y_0)| \leq \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \leq \\ &\leq \varepsilon + \eta \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \leq \varepsilon + \eta |b - a| \end{aligned}$$

■ מאחר ולקחנו $\eta, \varepsilon > 0$ קטנים כרצוננו, נקבל כי $f(b) - f(a) = 0$.

משפט 2.12 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי f גזירה כמעט בכל מקום על $[a, b]$, אינטגרבילית על $[a, b]$ וכן

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

הוכחה: ראינו כי f גזירה כמעט בכל מקום, וכן כי f' אינטגרבילית (כלומר, כאשר נראה כי היא הפרש בין מונוטוניות נראה את זה). נגדיר $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ להיות

$$g(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

ראינו כי g רציפה בהחלט, וכן ראינו כי $g'(x) = f'(x)$ כמעט בכל מקום. לכן $f - g$ רציפה בהחלט על $[a, b]$ וכן $(f - g)' = 0$ כמעט בכל מקום על $[a, b]$. לכן לפי הטענה הקודמת נקבל כי $f - g$ קבועה על $[a, b]$. כעת,

$$f(x) - \int_a^x f'(t) dt = f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a)$$

■ ולכן קיבלנו מה שרצינו.

משפט 2.13 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. אזי f רציפה בהחלט על $[a, b]$ אם ורק אם קיימת $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית כך שמתקיים

$$f(x) = \int_a^x h(t) dt + f(a)$$

ובמקרה זה $h = f'$ כמעט בכל מקום על $[a, b]$.

הוכחה: אם f רציפה בהחלט על $[a, b]$ ראינו כי f' אינטגרבילית על $[a, b]$ וכן כי

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt - f(a)$$

בכיוון השני, אם קיימת h עם התכונה במשפט, ראינו כי f רציפה בהחלט על $[a, b]$. כמו כן, ראינו כי מהתכונה שלעיל נובע שכמעט בכל מקום

$$f'(x) = \left(\int_a^x h(t) dt + f(a) \right)' = h(x)$$

■

ולכן סיימנו.

2.3 חזרה לפונקציות מונוטוניות

משפט 2.14 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית (עולה חלש). אזי $f' \geq 0$ מוגדרת כמעט בכל מקום, אינטגרבילית על $[a, b]$ וכן

$$\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a)$$

כמו כן השוויון

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

מתקיים אם ורק אם f רציפה בהחלט על $[a, b]$, ובמקרה זה

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

הוכחה: הוכחנו את הכל בטענה זו בעבר, חוץ מאשר שאם מתקיים השוויון

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

אזי f רציפה בהחלט ומתקיים

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

אכן, לכל $a \leq x \leq b$, f מונוטונית עולה על $[a, x]$, $[x, b]$. לכן

$$\int_a^x f'(t) dt \leq f(x) - f(a)$$

$$\int_x^b f'(t) dt \leq f(b) - f(x)$$

אם אחד מהאי שוויונים הללו חזק, נקבל

$$\int_a^b f'(t) dt < f(b) - f(a)$$

וזו סתירה. לכן האי שוויונים הללו הם שוויונים, ומהראשון מביניהם נובע התנאי שיש
 ■ להוכיח. מכאן אנו מסיקים גם כי f רציפה בהחלט.

הגדרה 2.15 פונקציה מונוטונית $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f' = 0$ כמעט בכל מקום על $[a, b]$ נקראת פונקציה סינגולרית.

דוגמה פונקציית קנטור $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ מונוטונית עולה ורציפה, ומקיימת $C' = 0$ כמעט בכל מקום על $[0, 1]$. לכן

$$\int_0^1 C' = 0 \neq 1 = C(1) - C(0)$$

והיא פונקציה סינגולרית.

הערה 2.16 אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית רציפה בהחלט וסינגולרית אזי f קבועה על $[a, b]$ (כי $f(x) - f(a) = \int_a^x f' = 0$)

טענה 2.17 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה. אזי קיימות ויחידות פונקציות מונוטוניות $f_a, f_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$f_a(a) = 0, f = f_a + f_s$$

f_a רציפה בהחלט על $[a, b]$, f_s סינגולרית על $[a, b]$ והן נתונות על ידי

$$f_a(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

$$f_s(x) = f - f_a(x)$$

הוכחה: יחידות: נניח כי $f = \tilde{f}_a + \tilde{f}_s$ פירוק עם תכונות זהות. אזי

$$f_a - \tilde{f}_a = f_s - \tilde{f}_s$$

נסמן בתור φ את הפונקציה המתוארת בשוויון זה. לפי צד ימין $\varphi' = 0$ כמעט בכל מקום על $[a, b]$, ולפי צד שמאל φ רציפה בהחלט על $[a, b]$. לכן φ קבועה על $[a, b]$, ובפרט

$$\varphi(a) = f_a(a) - \tilde{f}_a(a) = 0$$

לכן $\varphi = 0$ על $[a, b]$, ומכאן היחידות. קיום: תהיינה f_a, f_b כמו בתיאור בסוף הטענה. ברור כי $f_a, f_b(a) = 0$ רציפה בהחלט ומונוטונית (כי $f' \geq 0$ כמעט בכל מקום). כמו כן, ברור כי

$$f'_a = f'$$

כמעט בכל מקום. לכן $f'_s = 0$ כמעט בכל מקום על $[a, b]$. נותר לבדוק כי $f(s)$ מונוטונית על $[a, b]$. יהיו $a \leq x \leq y \leq b$ ונקבל

$$f_s(y) - f_s(x) = \left(f(y) - \int_a^y f' \right) - \left(f(x) - \int_a^x f' \right) = (f(y) - f(x)) - \int_x^y f'(t) dt \geq 0$$

■ והאי שוויון האחרון נובע מטענה שראינו כבר על פונקציות מונוטוניות.