

פונקציות ממשיות

© ארזים

20 בנובמבר 2016

1 המשך - מידה

ראינו כמה תכונות של מידות, נראה כעת עוד כמה.

1. אם $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ מדידות, וקיים n_0 כך שמתקיים $\mu(A_{n_0}) < \infty$, אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

הוכחה: אפשר להניח $\mu(A_1) < \infty$ לכל n קיים איחוד זר:

$$A_n = \left(\biguplus_{i=n}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})\right) \uplus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

לכן מתקיים

$$\infty > \mu(A_1) \geq \mu(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

בפרט, עבור $n = 1$, נקבל

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty$$

לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = 0$$

וכעת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

■

1.1 מידות שלמות והשלמה

הגדרה 1.1 מרחב מידה (X, Σ, μ) נקרא שלם μ נקראת מידה שלמה אם מתקיים

$$A \subseteq B, \mu(B) = 0, B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$$

במצב זה נובע כי $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) = 0$, כלומר $\mu(A) = 0$.

הגדרה 1.2 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. נסמן בתור $\bar{\Sigma}$ את האוסף של תת הקבוצות $E \subseteq X$ כך שקיימות $A, B \in \Sigma$ כך שמתקיים $A \subseteq E \subseteq B$, וכן $\mu(B \setminus A) = 0$. במצב זה נגדיר $\bar{\mu}(E) = \mu(A) = \mu(B)$.

טענה 1.3 בתנאי ההגדרה, $\bar{\mu} : \bar{\Sigma} \rightarrow [0, \infty]$ מוגדרת היטב, וכן היא סיגמא אלגברה על X המכילה את Σ . כמו כן $(X, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ מרחב מידה שלם עם $\bar{\mu}|_{\Sigma} = \mu$. מרחב זה נקרא ההשלמה של (X, Σ, μ) .

הוכחה: ראשית נבדוק כי $\bar{\mu}$ מוגדרת היטב. נניח כי $A, A_1 \subseteq E \subseteq B, B_1$ וכן $\mu(B \setminus A) = 0$, $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$. אזי מתוך $A \setminus A_1 \subseteq E \setminus A_1 \subseteq B_1 \setminus A_1$, נובע כי $\mu(A \setminus A_1) = 0$. כעת יש איחוד זר:

$$A = (A \cap A_1) \uplus (A \setminus A_1)$$

ולכן

$$\mu(A) = \mu(A \cap A_1) + \mu(A \setminus A_1) = \mu(A \cap A_1)$$

באופן דומה $\mu(A_1) = \mu(A \cap A_1)$, ולכן $\bar{\mu}$ מוגדרת היטב. אם $E \in \Sigma$ נקח $B = A = E$, ונקבל $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. כעת נבדוק כי $\bar{\Sigma}$ סיגמא אלגברה, וכן כי $\bar{\mu}$ מידה שלמה. $\emptyset \in \Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$, וכן $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. נניח כי $E \in \bar{\Sigma}$. אזי בסימונים שלעיל,

$$B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$$

וכן מתקיים $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A)$, ולכן $E^c \in \bar{\Sigma}$. תהינה E_1, E_2, \dots סדרה של קבוצות מתוך $\bar{\Sigma}$. בהתאם לכל E_n , $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ וכן $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$ אזי נובע כי

$$\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n E_n \subseteq \bigcup_n B_n$$

האיחודים $\bigcup A_n, \bigcup B_n$ הם איברי Σ , וכן

$$\mu\left(\bigcup B_n \setminus \bigcup A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup (B_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_n \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

ולכן מתקיים $\bigcup E_n \in \bar{\Sigma}$, כלומר $\bar{\Sigma}$ סיגמא אלגברה. אם בנוסף נתון כי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרות בזוגות, אזי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרות בזוגות ולכן

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_n E_n\right) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \bar{\mu}(E_n)$$

נותר לבדוק כי $\bar{\mu}$ שלמה. נניח כי $E_1 \subseteq E, E \in \bar{\Sigma}, \bar{\mu}(E) = 0$. נרצה להראות כי $E_1 \in \bar{\Sigma}$. קיימות $A, B \in \Sigma$ עם $A \subseteq E \subseteq B$ וכן $\mu(B \setminus A) = 0$ ואז $0 = \bar{\mu}(E) = \mu(A) = \mu(B)$. לכן $\emptyset \subseteq E_1 \subseteq B, B \in \Sigma, \mu(B \setminus \emptyset) = 0$, כלומר $E_1 \in \bar{\Sigma}$. ■

הגדרה 1.4 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. קבוצה $N \subseteq X$ נקראת זניחה אם קיימת $B \in \Sigma$ כך שמתקיים $N \subseteq B$ וכן $\mu(B) = 0$. במקרה זה, מתוך $\emptyset \subseteq N \subseteq B, \mu(B \setminus \emptyset) = 0$, נקבל כי $\bar{\mu}(N) = \mu(\emptyset) = 0, N \in \bar{\Sigma}$.

הערה 1.5 כל תת קבוצה של קבוצה זניחה היא זניחה.

טענה 1.6 תיאור $\bar{\Sigma}$ - התנאים הבאים שקולים:

1. $E \in \bar{\Sigma}$.

2. קיימת $N_1 \subseteq X$ זניחה, עם $A \in \Sigma$ ו- $E = A \cup N_1$.

3. קיימת $N_2 \subseteq X$ זניחה, עם $B \in \Sigma$ ו- $E = B \setminus N_2$.

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: יש $A \subseteq E \subseteq B$ עם $A, B \in \Sigma$ וכן $\mu(B \setminus A) = 0$. נגדיר $N_1 = E \setminus A$, ואז $E = A \cup N_1$ וכן $N_1 \subseteq B \setminus A$, כלומר זניחה, וכן $E = A \cup N_1$.
 $2 \Rightarrow 3$: מאחר ונתון כי N_1 זניחה, קיימת $C \in \Sigma$ עם $N_1 \subseteq C$ וכן $\mu(C) = 0$. נקח $B = A \cup C \in \Sigma$, ואז $E = A \cup N_1 \subseteq A \cup C = B$ וכן $\mu(B \setminus A) = \mu(C) = 0$. נקח $N_2 = B \setminus E$, כעת ניקח $E = A \cup N_1 \subseteq A \cup C = B$ וכן $\mu(B \setminus E) = \mu(C) = 0$. ומאחר שמתקיים $\mu(C) = 0$ נקבל כי N_2 זניחה, וכמובן $E = B \setminus N_2$.
 $3 \Rightarrow 1$: קיימת $N_2 \subseteq D \in \Sigma$ עם $\mu(D) = 0$, ואז $B \setminus D \subseteq E \subseteq B$ וכן $\mu(B \setminus (B \setminus D)) = \mu(D) = 0$, ולכן $E \in \bar{\Sigma}$. ■

מסקנה 1.7 $\bar{\Sigma}$ היא הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי Σ והקבוצות הזניחות.

1.2 תכונות כמעט בכל מקום

הגדרה 1.8 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. תהי $E \subseteq X$ ונאמר כי $x \in X$ מקיימת תכונה P אם $x \in E$ נאמר שהתכונה P מתקיימת כמעט בכל מקום אם $X \setminus E$ זניחה, כלומר אם יש $B \in \Sigma$ עם $\mu(B) = 0$, והתכונה P מתקיימת בכל נקודה מחוץ לקבוצה B (כלומר $(X \setminus E) \subseteq B$).

דוגמאות יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. יהיו $f, f_1, f_2, \dots : X \rightarrow \mathbb{C}, [-\infty, \infty]$ פונקציות. אומרים כי $f_n \rightarrow f$ נקודתית אם לכל $x \in X$ מתקיים $\lim f_n(x) = f(x)$. אומרים כי $f_n \rightarrow f$ כמעט בכל מקום אם קיימת קבוצה זניחה $N \subseteq X$ כך שלכל $x \in X \setminus N$ מתקיים $\lim f_n(x) = f(x)$. כעת נניח כי f, f_n מדידות. אזי הקבוצה $B = \{x \in X \mid \lim f_n(x) \neq f(x)\}$ מדידה, וניתן לקחת $N = X \setminus B$ מדידה.

1.3 תמונה של מידה ביחס לפונקציה

הגדרה 1.9 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה, ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה. אזי

$$\Sigma_Y := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \Sigma\}$$

היא סיגמא אלגברה של Y (ראינו זאת כבר). הפונקציה

$$\begin{aligned} f_*\mu : \Sigma_Y &\rightarrow [0, \infty] \\ f_*\mu(A) &= \mu(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

מידה זו נקראת המידה המושרית מהמידה μ על ידי f .

2 אינטגרציה של פונקציות אל $[0, \infty]$

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה.

2.1 פונקציות פשוטות

הגדרה 2.1 פונקציה מדידה $s : X \rightarrow [0, \infty)$ שמקיימת $|\text{Im}s| < \infty$ נקראת פונקציה פשוטה.

במצב זה, לפונקציה s יש פירוק

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

עם A_i מדידה לכל i , עבור

$$\chi_{A_i} = \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \notin A_i \end{cases}$$

אם ניקח $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שונים זה מזה ומאפס ואת A_1, \dots, A_n זרות בזוגות, תאור זה יחיד עד כדי סדר (אם $n=0, s=0$).

קרוב קונוני לפונקציה מדידה $f : X \rightarrow [0, \infty]$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר פונקציה פשוטה s_n על ידי

$$s_n(x) \begin{cases} \frac{i}{2^n} & (\forall 0 \leq i \leq 4^n - 1 \quad \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}) \\ 2^n & 2^n \leq f(x) \leq \infty \end{cases}$$

התכונות של הקרוב הזה הן:

1. לכל n, s_n פונקציה פשוטה.

2. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$.

3. $s_n \rightarrow f$ נקודתית.

4. אם f חסומה אזי $s_n \rightarrow f$ במידה שווה.

2.2 אינטגרציה

הגדרה 2.2 תהי $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ פונקציה פשוטה עם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שונים זה מזה ומאפס, A_1, \dots, A_n זרות בזוגות ומדידות. נגדיר

$$\int s = \int s \, d\mu = \int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

כמובן, $\int 0 = 0$.

הערה 2.3 אם $0 \leq a < \infty$, אזי $\int a s = a \int s$ - מידי.

הערה 2.4 אם $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ כאשר A_1, \dots, A_n מדידות וזרות בזוגות (אבל α_i לאו דווקא שונים זה מזה) אזי

$$\int s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

הוכחה: באינדוקציה על n . אם למשל $\alpha_{n-1} = \alpha_n$, אזי

$$s = \alpha_1 \chi_{A_1} + \dots + \alpha_{n-2} \chi_{A_{n-2}} + \alpha_{n-1} \chi_{A_{n-1} \cup A_n}$$

ואז לפי אינדוקציה

$$\int s = \alpha_1 \mu(A_1) + \dots + \alpha_{n-2} \mu(A_{n-2}) + \alpha_{n-1} \mu(A_{n-1} \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

■

מסקנה 2.5 אם $t, s : [0, \infty)$ פשוטות אזי $\int t + s = \int t + \int s$.

הוכחה: נניח כי

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$$

עם $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i, \alpha_0 = 0$ ומדידות וזרות בזוגות, ועם $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j, \beta_0 = 0$ ומדידות וזרות בזוגות, ועם A_0, A_1, \dots, A_n ו B_0, B_1, \dots, B_m אזי

$$t + s = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

וכן $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ מדידות וזרות באוגות, ולכן

$$\begin{aligned} \int t + s &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \mu \left(\sum_j \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_j \beta_j \left(\sum_i \mu(A_i \cap B_j) \right) = \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) = \int s + \int t \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.6 כאשר A_1, \dots, A_n מדידות, ולכל i מתקיים $0 \leq \alpha_i < \infty$, אזי

$$\int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

הערה 2.7 אם $0 \leq s \leq t$ פונקציות פשוטות אזי

$$\int s \leq \int t$$

הערה 2.8 אם s פשוטה אזי $\int s \in [0, \infty]$.

הגדרה 2.9 תהי $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה, אזי

$$\int f = \int_X f(x) d\mu(x) = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s d\mu \in [0, \infty]$$

כאשר s תמיד פשוטה.

תכונות

1. אם f פשטה ההגדרה שקולה להגדרה הקודמת.

2. אם $0 \leq f \leq g \leq \infty$ מדידות, אזי

$$\int f \leq \int g$$

3. תהי $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה. אזי $\int_X f d\mu = 0$ אם ורק אם $f = 0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: נניח כי האינטגרל הוא 0. לכל n נסמן $E_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. אזי $0 = \int s = \frac{1}{n} \mu(E_n)$ ולכן $s := \frac{1}{n} \chi_{E_n} \leq f$

מכך מתקיים כי

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$$

כלומר $f = 0$ כמעט בכל מקום.

קעת נניח כי f מתאפסת כמעט בכל מקום, ותהי $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i} \leq f$ כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ וכן A_1, \dots, A_n מדידות וזרות בזוגות. לכל i מתקיים $\mu(A_i) = 0$ כי $s = 0$ כמעט בכל מקום (כי $f = 0$ כמעט בכל מקום).

לכן $\int s = 0$, ומכאן נובע כי $\int f = 0$.

4. אם $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה וכן $\int_X f < \infty$ אזי $f < \infty$ כמעט בכל מקום. **הוכחה:** נסמן $E_\infty = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$. נרצה להראות כי $\mu(E_\infty) = 0$. לכל n נסמן $S_n = n \chi_{E_\infty}$ ולכן $s_n \leq f$

$$n\mu(E_\infty) = \int s_n \leq \int f < \infty$$

מכאן נקבל כי

$$\mu(E_\infty) \leq \frac{1}{n} \int f$$

וזאת לכל n , ולכן $\mu(E_\infty) = 0$.

5. אם $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות, וכן $f \leq g$ כמעט בכל מקום, אזי $\int f \leq \int g$. **הוכחה:** נסמן $E = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$. זו קבוצה מדידה וזניחה. נאפס עליה את שתי הפונקציות, וזה לא ישנה אינטגרל, אבל נקבל $f \leq g$ בכל נקודה.

מסקנה 2.10 אם $f = g$ כמעט בכל מקום אזי $\int f = \int g$.

6. תהי $f \geq 0$ מדידה ויהי $c \in [0, \infty]$. אזי $\int cf = c \int f$. **הוכחה:** אם $0 \leq c < \infty$ השוויון מידי. נניח כי $c = \infty$. אם $f = 0$ כמעט בכל מקום אזי $\int cf = 0$ כמעט בכל מקום ושני הצדדים 0. נניח כי f אינה אפס כמעט בכל מקום, אזי $\int f > 0$, ולכן $\int cf = \infty$. כמו כן,

$$\int \infty \cdot f \geq \int nf = n \int f$$

ולכן $\int \infty f = \infty$.

בפרט:

$$\int \infty \chi_E = \infty \int \chi_E = \infty \cdot \mu(E) = \begin{cases} \infty & \mu(E) > 0 \\ 0 & \mu(E) = 0 \end{cases}$$

2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית

משפט 2.11 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. תהינה $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ סדרת פונקציות מדידות כך שמתקיים $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. נסמן $f = \lim f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ אזי f מדידה וכן

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$$

הוכחה: ראינו כבר כי f מדידה. האי שוויון בכיוון \geq מיידי (כי $f \geq f_m$ לכל m). נוכיח את האי שוויון השני. די להוכיח כי אם $0 \leq s \leq f$ פשוטה אזי

$$\int s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

יהי $0 < c < 1$. לכל $x \in X$ קיים n שעבורו $c \cdot s(x) \leq f_n(x)$ אכן, אם $s(x) = 0$ מיידי. נניח כי $s(x) > 0$ אזי

$$0 < c \cdot s(x) < s(x) \leq f(x) = \lim f_n(x)$$

ולכן קיים n מתאים. נסמן

$$E_n = \{x \in X \mid c \cdot s(x) \leq f_n(x)\}$$

אז E_n מדידה לכל n וכן $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$. כמו כן מתקיים

$$\lim \int f_n \leq \int f_n \geq \int \chi_{E_n} \cdot f_n \geq \int \chi_{E_n} \cdot c \cdot s = \int \sum_{i=1}^k c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i \cap E_n}$$

כאשר $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$, עבור $0 < \alpha_i < \infty$, A_i מדידות זרות בזוגות. נמשיך את השוויון:

$$\int \sum c \alpha_i \chi_{A_i \cap E_n} = c \cdot \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \rightarrow c \sum \alpha_i \mu(A_i) = c \cdot \int s$$

לכן נקבל כי $\lim f_n \geq c \cdot \int s$, וזה נכון לכל $0 < c < 1$, ולכן

$$\lim \int f_n \geq \int s$$

אם $\int s = 0$ זה טריוויאלי, אם $\int s = \infty$ אזי $\int c \cdot s = \int s$. אם $0 < \int s < \infty$ זה נובע מיידי. ■

טענה 2.12 (חיבוריות) אם $f, g \geq 0$ מדידות אזי

$$\int f + g = \int f + \int g$$

הוכחה: יש $s_n \nearrow g, t_n \nearrow f$ כאשר t_n, s_n פשוטות, ואז $s_n + t_n \nearrow f + g$ ולכן

$$\int f + g \leftarrow \int s_n + t_n = \int s_n + \int t_n \rightarrow \int f + \int g$$

■

מסקנה 2.13 אם $0 \leq f \leq g \leq \infty$ מדידות וכן $\int f = \int g < \infty$ אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: יש $0 \leq h \leq \infty$ מדידה עם $g = f + h$ ואז $\int g = \int f + \int h$. נובע כי $\int h = 0$ ולכן $h = 0$ כמעט בכל מקום.

■

טענה 2.14 (טורים) אם $h_n : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות, אזי

$$\int \sum h_n = \sum \int h_n$$

הוכחה: מתקיים

$$\sum_{n=1}^k h_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int h_n \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n = \int \sum_{n=1}^k h_n \rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

■

משפט 2.15 (הלמה של בורל וקנטלי) יהיו $E_n \subseteq X$ מדידות לכל n , כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אזי הקבוצה Γ של כל הנקודות ששייכות לאינסוף מבין E_i היא זניחה (ומדידה).

הוכחה: נסמן $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$. מדידה, וכן $\Gamma = f^{-1}(\infty)$, לכן Γ מדידה. כמו כן

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \int f$$

■

ראינו שנובע כי $f < \infty$ כלומר Γ זניחה.

משפט 2.16 (הלמה של פטו) אם $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות, אזי

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

הוכחה:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq n} f_i \right)$$

$n \rightarrow \inf_{i \geq n} f_i$ היא סדרה מונוטונית עולה, ולכן השוויון ממשיך:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq n} f_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_{i \geq n} f_i$$

לכל $j \geq n$ מתקיים $\int \inf_{i \geq n} f_i \leq \int f_j$, ולכן $\int \inf_{i \geq n} f_i \leq \inf_{j \geq n} \int f_j$. ממשיכים:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq n} f_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_{i \geq n} f_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{j \geq n} \int f_j = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

■

הגדרה 2.17 אם $E \subseteq X$ מדידה, $f \geq 0$ מדידה, מגדירים

$$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$$

תכונה אם $\mu(E) = 0$ אזי $\int_E f \, d\mu = 0$ כי $\chi_E \cdot f = 0$ כמעט בכל מקום.

הערה 2.18 בסימונים אלה ראינו כי

$$\Sigma|_E = \{A \subseteq X \mid A \in \Sigma, A \subseteq E\} \subseteq \Sigma$$

היא סיגמא אלגברה על E , וברור כי

$$\mu|_E := \mu|_{\Sigma_E}$$

מידה על $(E, \Sigma|_E)$, כלומר $(E, \Sigma|_E, \mu|_E)$ מרחב מידה, ועבור $f \geq 0$ על X מתקיים

$$\int_E f|_E \, d\mu|_E = \int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$$

כפי שהוגדר לעיל (נובע בעזרת הקירוב הקונוני עם פונקציות פשוטות).

2.4 כפל מידה בפונקציה

הגדרה 2.19 תהי $h : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה מדידה. נגדיר פונקציה $\lambda : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ על ידי

$$\lambda(E) = \int_E h \, d\mu = \int_X \chi_E h \, d\mu$$

טענה 2.20 λ מידה על (X, Σ) .

הוכחה: ברור כי $\lambda(\emptyset) = \int_X 0h \, d\mu = 0$. כעת נניח כי E_1, E_2, \dots מדידות זרות. אזי

$$\lambda\left(\bigcup E_n\right) = \int \chi_{\bigcup E_n} \cdot h \, d\mu = \int \left(\sum \chi_{E_n}\right) h \, d\mu = \sum \int \chi_{E_n} h \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

■

טענה 2.21 תהי $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה. אזי

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X fh \, d\mu$$

הוכחה: תהיינה $s_n \nearrow f$ פשוטות, ואז $s_n h \nearrow fh$. כעת

$$\int_X f \, d\lambda \leftarrow \int_X s_n \, d\lambda = \int_X s_n h \, d\mu \rightarrow \int_X fh \, d\mu$$

השוויון הזה עבור פונקציות פשוטות, שבאמצע, נובע מהנכונות לפונקציות אופיינות χ_E .

■

מסמנים

$$d\lambda = h \, d\mu$$