

פונקציות ממשיות

© ארזים

27 בנובמבר 2016

1 אינטגרציה של פונקציות אי שליליות

1.1 אינטגרל ביחס למידה מושרית

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה, ותהי $\varphi : X \rightarrow Y$ פונקציה. נסמן

$$\Sigma_Y = \{A \subseteq Y \mid \varphi^{-1}(A) \in \Sigma\}$$

ונגדיר

$$\varphi_*\mu : \Sigma_Y \rightarrow [0, \infty]$$

על ידי

$$(\varphi_*\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$$

ראינו כי $(Y, \Sigma_Y, \varphi_*\mu)$ מרחב מידה. אם $A \in \Sigma_Y$, אזי χ_A מדידה (על Y), וכן

$$\chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$$

וזוהי פונקציה מדידה (על X) - כי $\varphi^{-1}(A) \in \Sigma$. כמו כן:

$$\int_Y \chi_A d\varphi_*\mu = (\varphi_*\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)) = \int_X \chi_{\varphi^{-1}(A)} d\mu = \int_X \chi_A \circ \varphi d\mu$$

מסקנה 1.1 לכל $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה, הפונקציה $h \circ \varphi : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה, ומתקיים

$$\int_Y h d\varphi_*\mu = \int_X h \circ \varphi d\mu$$

הוכחה: אם h פשוטה המסקנה נובעת מהחישוב שראינו לפני רגע. במקרה הכללי ניקח $h \circ \varphi$ פשוטות על Y . אזי מתקיים $t_n \circ \varphi \nearrow h \circ \varphi$ בפרט נובע כי $t_n \circ \varphi$ פשוטות על X . במידה וכמו כן:

$$\int_Y h d\varphi_*\mu \leftarrow \int_Y t_n d\varphi_*\mu = \int_X t_n \circ \varphi d\mu \rightarrow \int_X h \circ \varphi d\mu$$

■

מינוח מידה 0 על (X, Σ) היא המידה עבורה $0(A) = 0$ לכל $A \in \Sigma$.

2 אינטגרציה של פונקציות ממשיות ומרוכבות

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה.

2.1 סימונים והגדרות

תהי $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ פונקציה מדידה. נסמן

$$\begin{aligned} f^+ &= \max(f, 0) \\ f^- &= -\min(f, 0) = \max(-f, 0) = (-f)^+ \end{aligned}$$

אזי $f^\pm : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידות, וכן

$$\begin{aligned} 0 &\leq f^\pm \leq |f| \\ |f| &= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}$$

תכונה אם $f = g - h$ בכל נקודה בה ההפרש מוגדר, וכן $g \geq 0, h \geq 0, \infty \geq g, h$ אזי $g \geq f^+, h \geq f^-$.

הוכחה: די לבדוק $g \geq f^+$, כי מתקיים $-f = h - g$ עם אותם תנאים, ונובע $h \geq (-f)^+ = f^-$.

אם $g = \infty$, האי שוויון מיידי.

נניח כי $g < \infty$. אם $h = \infty$ האי שוויון מיידי ($f = -\infty$), ואם h סופי, האי שוויון מיידי.

■

2.2 פונקציות ממשיות

הגדרה 2.1 תהי $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ אומרים כי f אינטגרבילית (על X) אם f מדידה וכן

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

במקרה זה מגדירים

$$\int_X f(x) d\mu(X) = \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in (-\infty, \infty)$$

תכונות

1. אם $f \geq 0$ אז הגדרת האינטגרל היא תואמת את ההגדרה הקודמת.

2. אם f אינטגרבילית וכן $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי

$$\int \alpha f = \alpha \int f$$

אכן, זה נכון עבור $\alpha = -1, \alpha = 0$ וכן $\alpha > 0$.

3. אם f, g אינטגרביליות, אזי $f + g$ אינטגרבילית וכן

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

הוכחה:

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ולכן

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

מכאן מתקיים

$$\int (f + g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f + g)^- + \int f^+ + \int g^+$$

כל המספרים סופיים שכן

$$\int |f + g| \leq \int |f| + |g| = \int |f| + \int |g| < \infty$$

ובסך הכל

$$\int f + g = \int (f + g)^+ - \int (f + g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

■

מסקנה 2.2 האינטגרל הוא פונקציה לינארית מעל \mathbb{R} .

4. אם f, g אינטגרביליות על X וכן $f \leq g$ אזי $\int f \leq \int g$.
הוכחה:

$$\int g - \int f = \int (g - f) \geq 0$$

■ (כעת אם $f \geq 0$ אינטגרבילית ברור כי $\int f \geq 0$)

5. אם $f = g$ כמעט בכל מקום, f, g ואחת מהן אינטגרבילית, אזי $\int f = \int g$ (כי $f^\pm = g^\pm$ כמעט בכל מקום).

6. אם f, g אינטגרביליות עם $f \leq g$, וכן $\int f = \int g$, אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

■ **הוכחה:** $g - f \geq 0$ אבל $\int (g - f) = 0$ ולכן $g - f = 0$ כמעט בכל מקום.

7. קיימת ההכללה הבאה: אם $f : [-\infty, \infty]$ מדידה וכן $\int f^+ < \infty$ או $\int f^- < \infty$ מגדירים לעיתים

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in [-\infty, \infty]$$

2.3 פונקציות מרוכבות

הגדרה 2.3 פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת אינטגרבילית (על X) אם f מדידה וכן

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

במצב זה נובע מהאי שוויונים

$$\int |\operatorname{Re} f|, \int |\operatorname{Im} f| \leq \int |f| < \infty$$

כי $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ אינטגרביליות, ומגדירים

$$\int_X f d\mu = \int_X (\operatorname{Re} f) d\mu + i \int_X (\operatorname{Im} f) d\mu$$

או לחילופין:

$$\operatorname{Re} \left(\int f \right) = \int \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im} \left(\int f \right) = \int \operatorname{Im}(f)$$

תכונות

1. ההגדרה הזו תואמת לקודמת (כאשר הפונקציה ממשית הן מזדהות).
 2. תהי f מדידה. אזי f אינטגרבילית אם ורק אם $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ אינטגרביליות.
הוכחה: אם f אינטגרבילית, ראינו בהגדרה את הטענה. אם $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ אינטגרביליות, הטענה נובעת מכך שמתקיים $|f| \leq |\operatorname{Im} f| + |\operatorname{Re} f|$. ■

3. אם f, h מדידות, h אינטגרבילית וכן $|f| \leq |h|$ אזי f אינטגרבילית.
 4. אם f, g אינטגרביליות אזי $f + g$ אינטגרבילית ומתקיים $\int (f + g) = \int f + \int g$.
 5. אם f אינטגרבילית וכן $\lambda \in \mathbb{C}$ אזי λf אינטגרבילית ומתקיים $\int \lambda f = \lambda \int f$.
הוכחה: אם λ ממשי זה נובע מאינטגרציה של פונקציות ממשיות. אם $\lambda = i$, אזי

$$\int i f = \int \operatorname{Re}(i f) + i \int \operatorname{Im}(i f) = \int -\operatorname{Im}(f) + i \int \operatorname{Re}(f) = i \left(\int \operatorname{Re}(f) + i \int \operatorname{Im}(f) \right) = i \int f$$

- כעת מחיבוריות הטענה נובעת.

6. אם f, g מדידות, אחת מהן אינטגרבילית, וכן $f = g$ כמעט בכל מקום, אזי שתייהן אינטגרביליות ומתקיים $\int f = \int g$.

טענה 2.4 אם f אינטגרבילית אזי $|f|$ אינטגרבילית (מיידיית) וכן

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

הוכחה: קיים $\theta \in \mathbb{R}$ עבורו

$$\int f \, d\mu = e^{i\theta} \left| \int f \, d\mu \right|$$

ולכן

$$\int e^{-i\theta} f \, d\mu = e^{-i\theta} \int f \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right| \geq 0$$

מכאן

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| &= \int e^{-i\theta} f \, d\mu = \operatorname{Re} \left(\int e^{-i\theta} f \, d\mu \right) = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \, d\mu \leq \\ &\leq \int |f| \, d\mu \end{aligned}$$

■

הערה 2.5 אם $E \subseteq X$ מדידה מגדירים

$$\int_E f = \int_X \chi_E f$$

2.4 משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג

משפט 2.6 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. תהי $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ סדרת פונקציות מדידות כך שקיים

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

לכל $x \in X$. אם קיימת פונקציה מדידה $g : X \rightarrow [0, \infty]$ כך שמתקיים

$$\int_X g \, d\mu < \infty$$

$$|f_n| \leq g$$

אזי f אינטגרבלית, וכן מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

הוכחה: ראשית נסמן

$$N = g^{-1}(\infty)$$

אזי N מדידה וכן $\mu(N) = 0$. ניתן לאפס את f_n ואת g על N , ולכן אפשר להניח כי g סופית בכל נקודה. כעת, f מדידה, ומתקיים $|f| \leq |g|$, ולכן f אינטגרבלית. לכן גם $|f_n - f|$ אינטגרבליות. מתקיים כמובן

$$2g - |f_n - f| \geq 0$$

ולכן מהלמה של פטו מתקיים

$$\begin{aligned} \int 2g &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f_n - f|) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int 2g + (-1) \int |f_n - f| \right) = \\ &= \int 2g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int |f_n - f| \right) = \int 2g - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \end{aligned}$$

לכן $\lim \int |f_n - f| = 0$ ומכאן $\limsup \int |f_n - f| \leq 0$ כך שנותר הוא

$$0 \leq \left| \int f - \int f_n \right| = \left| \int (f - f_n) \right| \leq \int |f - f_n| \rightarrow 0$$

■

3 אינטגרל ביחס להשלמת מידה ופונקציות מוגדרות כמעט בכל מקום

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה ותהי $(X, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ ההשלמה.

3.1 התחלה עם μ

1. אם $f : X \rightarrow Y$ כאשר Y מרחב מטרי, היא מדידה μ , אזי היא מדידה $\bar{\mu}$.

2. תהי $f : X \rightarrow [0, \infty]$ מדידה μ , אז

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\bar{\mu}$$

אכן, יש $f \nearrow s_n$ פשוטות ולכן

$$\int f d\bar{\mu} \leftarrow \int s_n d\bar{\mu} = \int s_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

3. אם $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה, אזי היא μ אינטגרבילית אם ורק אם g היא $\bar{\mu}$ אינטגרבילית (שכן $\int |g| d\bar{\mu} = \int |g| d\mu$), ובמקרה זה $\int g d\bar{\mu} = \int g d\mu$ (בעזרת פירוק לחלקים - ממשי ודמיוני, חיובי ושלילי).

3.2 התחלה עם $\bar{\mu}$

תהי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה $\bar{\mu}$ מדידה. אזי קיימת פונקציה $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה כך שמתקיים $f = g$ כמעט בכל מקום. **הוכחה:** על ידי פירוק $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$, די לבדוק זאת עבור f ממשית. על ידי הפירוק $f = f^+ - f^-$, די לבדוק זאת עבור $f : X \rightarrow [0, \infty)$ מדידה $\bar{\mu}$.

יהיו $f \nearrow s_n$ פשוטות קירוב מונוטוני. נסמן

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= s_2 - s_1 \\ t_3 &= s_3 - s_2 \end{aligned}$$

וכן הלאה. כמובן t_n פשוטה $\bar{\mu}$ לכל n , ומתקיים

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$$

לכל n קיימת g_n פשוטה כך שמתקיים $t_n = g_n$ כמעט בכל מקום, $g_n(x) = 0$ אם $t_n(x) = 0$ כעת נגדיר

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

■

3.3 פונקציות מוגדרות כמעט בכל מקום

הגדרה 3.1 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. פונקציה מוגדרת כמעט בכל מקום מתוך X לתוך \mathbb{C} היא זוג (f, N) , כאשר $N \subseteq X$ זניחה, וכן $f : (X \setminus N) \rightarrow \mathbb{C}$. במצב זה מגדירים את f להיות 0 על N , ומקבלים פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, ובהתאם להגדרה זו מתייחסים לתכונות היות f מדידה ולאינטגרביליות של f . נאח את התכונות הללו ביחס למידה השלמה $\bar{\mu}$.

הערה 3.2 תכונות אלה אינן תלויות בקבוצה N .

3.4 טורים

טענה 3.3 תהי f_n סדרת פונקציות מרוכבות מדידות ואינטגרביליות המוגדרות כמעט בכל מקום על X וכך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\bar{\mu} < \infty$$

אזי הטור $f(x) = \sum f_n(x)$ מתכנס כמעט בכל מקום ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\bar{\mu}$$

הוכחה: קיימת קבוצה $N \subseteq X$ זניחה כך שכל f_n מוגדרת מחוץ אליה, ונגדיר את f_n כולן להיות 0 על N . נגדיר

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| : X \rightarrow [0, \infty]$$

שהיא כמובן $\bar{\mu}$ מדידה. כמו כן

$$\int g \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, d\bar{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$$

כאשר המעבר השני הוא על ידי התכנסות מונוטונית על הסכומים החלקיים. נסמן $N' = g^{-1}(\infty)$, שהיא זניחה, והסכום $\sum f_n$ מתכנס בהחלט מחוץ אליה. נאפס כל f_n על N' , ואחרי שינוי זה, $\sum f_n$ ייתכנס בהחלט בכל מקום. הסכומים החלקיים מקיימים

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i \right| \leq g$$

בסך הכל, ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג, נובע כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^n f_i = \int \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \int f$$

כלומר קיבלנו

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int f_i = \int f$$

■

3.5 אינטגרלי על תת קבוצות מדידות וערכי f

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה.

טענה 3.4 אם $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ אינטגרלית על X וכן לכל $E \in \Sigma$ מתקיים

$$\int_E f \, d\mu$$

אזי $f = 0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: ניתן להניח כי f ממשית (לפי הפירוק $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$). כעת נסמן

$$\begin{aligned} E^+ &= \{x \mid f(x) \geq 0\} \\ E^- &= \{x \mid f(x) < 0\} \end{aligned}$$

ואז

$$0 = \int_{E^+} f = \int_{E^+} f^+ = \int_X f^+$$

לכן $f^+ = 0$ כמעט בכל מקום. באופן דומה נובע $f^- = 0$ כמעט בכל מקום. לכן $f = f^+ - f^- = 0$ כמעט בכל מקום. ■

טענה 3.5 תהי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מרוכבת. אזי מתקיים

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \int |f| \, d\mu$$

אם ורק אם $\lambda \in \mathbb{C}$ עם $|\lambda| = 1$, כך שמתקיים $f = \lambda |f|$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: אם $f = \lambda |f|$ עם $|\lambda| = 1$, אזי

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int \lambda |f| \, d\mu \right| = |\lambda| \int |f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu$$

בכיוון השני, נניח שהתנאי על האינטגרלים מתקיים. על ידי כפל באיזשהו $e^{i\varphi}$ עם φ ממשי מתאים ניתן להניח כי

$$\int f \, d\mu$$

בפרט הוא ממשי, ולכן

$$\int f = \operatorname{Re} \int f = \int \operatorname{Re} f$$

מכאן מתקיים

$$\int \operatorname{Re} f = \int f = \left| \int f \right| = \int |f| = \int \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$$

לכן מתקיים

$$\int \left(\sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2} - \operatorname{Re} f \right) = 0$$

אבל הביטוי שבסוגריים אי שלילי, ולכן

$$\sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2} = \operatorname{Re} f$$

כמעט בכל מקום. כלומר $\operatorname{Im} f = 0$ כמעט בכל מקום, וכן $\operatorname{Re} f \geq 0$ כמעט בכל מקום, ולכן $f = |f|$ כמעט בכל מקום. ■

משפט 3.6 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה עם מידה סיגמא סופית. תהי $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה אינטגרלית, ותהי $S \subseteq \mathbb{C}$ סגורה. נניח שלכל $E \in \Sigma$ עם $0 < \mu(E) < \infty$ מתקיים

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in S$$

אזי $f(x) \in S$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: נייעזר בכך שכל קבוצה פתוחה בתוך \mathbb{C} היא איחוד בן מניה של כדורים פתוחים (כי \mathbb{C} ספרבילי), ולכן גם איחוד בן מניה של כדורים סגורים. רוצים להראות

$$\mu(f^{-1}(S^c)) = 0$$

כמובן, S^c היא איחוד בן מניה של כדורים סגורים. לכן די להוכיח כי אם $\overline{B} = \overline{B(z, \varepsilon)} \subseteq S^c$, אזי $\mu(f^{-1}(\overline{B})) = 0$. נסמן $E = f^{-1}(\overline{B})$. יש פירוק

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

עם $\mu(X_n) < \infty$. מספיק להראות כי

$$\mu(E \cap X_n) = 0$$

לכל n . נניח בשלילה כי זה לא מתקיים, כלומר $\mu(E \cap X_n) > 0$. אזי

$$0 < \mu(X_n \cap E_n) \leq \mu(X_n) < \infty$$

אם $x \in E \cap X_n$, אזי $x \in E$ ולכן

$$f(x) \in \overline{B} = \overline{B(z, \varepsilon)}$$

כלומר, $|f(x) - z| \leq \varepsilon \iff x \in E \cap X_n$. לכן

$$\int_{E \cap X_n} |f - z| \leq \varepsilon \mu(E \cap X_n)$$

כעת

$$\left| \left(\frac{1}{\mu(E \cap X_n)} \cdot \int_{E \cap X_n} f \, d\mu \right) - z \right| = \left| \frac{1}{\mu(E \cap X_n)} \int_{E \cap X_n} (f - z) \, d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E \cap X_n)} \int_{E \cap X_n} |f - z| \, d\mu \leq \varepsilon$$

כלומר מקבלים

$$\frac{1}{\mu(E \cap X_n)} \int_{E \cap X_n} f \, d\mu \in \overline{B(z, \varepsilon)} \subseteq S^c$$

■

אבל זו סתירה לנתון.