

פונקציות ממשיות

© ארזים

18 בדצמבר 2016

1 מספר השלמות

1.1 מידת סטילטיס לפי מונוטוניות

הגדרה 1.1 תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה במובן החלש. נסמן

$$f_+(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$
$$f_-(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$$

מתקיים

$$f_- \leq f \leq f_+$$

כמו כן f_{\pm} מונוטונית עולות במובן החלש. כמו כן, f_+ רציפה מימין. מכאן מקבלים, על ידי התייחסות לפונקציה $f_+ - f_+$ (0), שקיימת מידת בורל יחידה μ עם \mathbb{R} כך שמתקיים

$$\mu((a, b]) = f_+(b) - f_+(a)$$

מסמנים מידה זו $d\mu = df$, ולכן מסמנים

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) df(x)$$

הערה 1.2 מתקיים

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f_+(t) = f_-(x)$$

מסקנה 1.3 מתקיימים הבאים:

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &= f_+(b) - f_-(a) \\ \mu((a, b)) &= f_-(b) - f_+(a) \\ \mu([a, b)) &= f_-(b) - f_-(a)\end{aligned}$$

1.2 מידות שלמות

טענה 1.4 תהי (X, Σ, μ) מידה שלמה. תהי $\Sigma' \subseteq \Sigma$ תת סיגמא אלגברה. נסמן $\mu' = \mu|_{\Sigma'}$ ואז (X, Σ', μ') מידה. תהי $(X, \overline{\Sigma'}, \overline{\mu'})$ ההשלמה שלה. אזי $\overline{\Sigma'} \subseteq \Sigma$ ו- $\overline{\mu'} = \mu|_{\overline{\Sigma'}}$.

הוכחה: תהי $E \in \overline{\Sigma'}$. אזי קיימות $A \subseteq E \subseteq B$ כד שמתקיים $A, B \in \Sigma'$, $\mu'(B \setminus A) = 0$ ו- $\mu(B \setminus A) = 0$. מאחר והמידה μ שלמה נובע כי $E \in \Sigma$. לבסוף, $\overline{\mu'}(E) = \mu'(A) = \mu(A)$ וכן $\mu(E \setminus A) = 0$.

$$\mu(E \setminus A) \leq \mu(B \setminus A) = 0$$

ולכן

$$\mu(E) = \mu(A) + \mu(E \setminus A) = \mu(A) = \mu'(A) = \overline{\mu'}(E)$$

■

1.3 על רגולריות מבפנים

הגדרה 1.5 יהי X מרחב מטרי. קבוצה מסוג F_σ היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורה.

הערה 1.6 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה מסוג F_σ . אזי יש תיאור של A בתור איחוד בן מניה של קבוצות סגורות וחסומות. אכן, אם F סגורה אזי מתוך

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap [-n, n]^d)$$

נובע כי F איחוד סדרה בת מניה של קבוצות סגורות וחסומות.

טענה 1.7 תהי $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \mu)$ מידה כד שמתקיים $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Sigma$, וכן μ סופית על קבוצות מדידות חסומות. תהי $E \in \Sigma$ רגולרית מבפנים (כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $F \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה עברה $F \subseteq E$ וכן $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$). אזי:

1. קיימת $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מסוג F_σ כד שמתקיים $A \subseteq E$ וכן $\mu(E \setminus A) = 0$.
2. $\mu(E) = \sup \{ \mu(F) \mid F \subseteq E, F \text{ is closed} \}$.
3. $\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ is closed and bounded} \}$.

הוכחה:

1. לכל n קיימת $F_n \subseteq E$ סגורה עבורה $\mu(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$, ואז נקח $A = \bigcup_n F_n$.
2. יהי $\varepsilon > 0$. תהי $F \subseteq E$ סגורה עם $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. אזי $\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F) \leq \mu(F) + \varepsilon$. אם $\mu(E) \leq \infty$ נובע כי $\mu(F) = \infty$ ולכן 2 נכון. אם $\mu(E) < \infty$, אזי

$$\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$$

ושוב נובע 2.

3. נובע מהסעיף הקודם יחד עם העובדה שלכל $F \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה, יש איחוד $F = \bigcup K_n$ כאשר

$$K_n = F \cap [-n, n]^d$$

ואלה סגורות וחסומות לכל n . לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(K_n) = \mu\left(\bigcup_n K_n\right) = \mu(F)$$

2 תכונות מידת לבג

■

2.1 המידה החיצונית

תהי $m^* : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ המידה החיצונית (המתקבלת מהפונקציה $f(x) = x$) הנתונה על ידי

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i) \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\} \end{aligned}$$

ראינו כי m^* מידה חיצונית. נסמן בתור Σ את אוסף הקבוצות המדידות קרתאודורי - זוהי סיגמא אלגברה.

תזכורת $A \in \Sigma$ אם ורק אם לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

ודי לבדוק את האי שוויון \geq עבור $m^*(E) < \infty$.

ראינו גם שכל קבוצת בורל היא מדידה כי m^* מידה חיצונית מטריית. כמו כן, ראינו כי $(\mathbb{R}, \Sigma, m^* |_{\Sigma})$ מידה שלמה. לבסוף, בדקנו גם כי

$$m^*([a, b)) = m^*((a, b)) = m^*([a, b]) = m^*((a, b]) = b - a$$

וכן $m^*({x}) = 0$.
 הצמצום $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m^* |_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$ היא מידת בורל-לנג. אכן, ראינו שזו מידת בורל אינווריאנטית להזזות, ומתקיים $m^*([0, 1]) = 1$.
 ההשלמה של המידה הזו היא מידת לבג. נסמן את אוסף הקבוצות המדידות לבג $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. מאחר והמידה $(\mathbb{R}, \Sigma, m^* |_{\Sigma})$ שלמה, נובע כי $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma$, וכן לכל $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, מידת לב שלה היא בדיוק $m^*(E)$.
 לכן מידת לבג היא למעשה $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m^* |_{\mathcal{L}(\mathbb{R})})$. נסמן $m = m^* |_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ את מידת לבג. אזי

$$m(E) = m^*(E)$$

לכל E מדידה לבג. ראינו גם כי $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ היא אינווריאנטית להזזות ורגולרית (כי ראינו שתכונות אלה נשמרות תחת השלמת מידות, ולמידת בורל-לנג יש תכונות אלה).

הערה 2.1 תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ אזי

$$m^*(E) = \inf \{m(O) \mid E \subseteq O, O \text{ is open}\}$$

הוכחה: האי שוויון \leq מיידי. כמו כן, מתוך

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i$$

נובע כעת כי

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\} = \\ &= \inf \{m(O) \mid E \subseteq O, O \text{ is open}\} \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.2 לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = \min \{m(A) \mid E \subseteq A, A \text{ is } G_\delta\}$$

הוכחה: אם $m^*(E) = \infty$, זה מיידי. אחרת, לכל n יש $E \subseteq O_n \subseteq \mathbb{R}$ עם O_n פתוחה, וכך שמתקיים

$$m(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

נסמן $A = \bigcap_n O_n$. אזי A מסוג G_δ , $E \subseteq A$ וכן $m^*(A) \leq m(E)$. כמו כן $E \subseteq A$, ולכן $m^*(E) \leq m^*(A)$, כלומר $m^*(E) = m^*(A)$.
כמו כן, לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $E \subseteq A$ מתקיים $m^*(E) \leq m(A)$. לכן נובע כי

$$m^*(E) = \min \{m(A) \mid E \subseteq A, A \text{ is } G_\delta\}$$

■

והמינימום מושג באותה A שראינו.

2.1.1 קבוצות זניחות

טענה 2.3 תהי $N \subseteq \mathbb{R}$. אזי $m^*(N) = 0$ אם ורק אם N מדידה לבג וכן $m(N) = 0$.

הוכחה: \Rightarrow ברור, כי $m^*(N) = m(N) = 0$.
 \Leftarrow קיימת $N \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ כך שהקבוצה A מהסוג G_δ , ובפרט A בורל. לכן A מדידה לבג, וכן $m(A) = m^*(N) = 0$. מאחר ומתקיים $N \subseteq A$ ומידת לבג שלמה, נובע כי $m(N) \leq 0$.
■

2.2 השוואת מדידות לבג וקרתאודורי

טענה 2.4 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. אזי A מדידה לבג אם ורק אם A מדידה קרתאודורי, כלומר אם ורק אם לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

הוכחה: די להוכיח שאם A מדידה קרתאודורי, אזי A מדידה לבג (כיוון שני ראינו).
מאחר ומתקיים

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n, n])$$

אפשר להניח כי A חסומה. בפרט, $m^*(A) < \infty$. קיימת קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $m(B) = m^*(A)$ וכן $A \subseteq B$.

מאחר והקבוצות A, B מדידות קרתאודורי, מתקיים

$$m(B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A)$$

מאחר ומתקיים $m(B) = m^*(A) < \infty$, נובע כי $m^*(B \setminus A) = 0$. לכן $B \setminus A$ מדידה לבג, ומאחר וגם B מדידה לבג, נובע כי $A = B \setminus (B \setminus A)$ היא גם מדידה לבג. ■

2.3 סיכום איפיון קבוצות מדידות לבג

2.3.1 מידה פנימית

הגדרה 2.5 תהי $S \subseteq \mathbb{R}$ חסומה. יהיו $-\infty < a < b < \infty$ עבורם $S \subseteq [a, b]$, ונסמן

$$m_*(S) = b - a - m^*([a, b] \setminus S)$$

נבדוק שההגדרה הזו אינה תלויה בבחירת $[a, b]$ שמכיל את S . די להוכיח שאם $S \subseteq [a, b] \subseteq [c, d]$ אזי

$$(d - c) - m^*([c, d] \setminus S) = (b - a) - m^*([a, b] \setminus S)$$

אבל $\Gamma = [c, a) \cup (b, d]$ מדידה (בורל ולכן לבג), ולכן

$$\begin{aligned} m^*([c, d] \setminus S) &= m^*([c, d] \setminus S \cap \Gamma) + m^*([c, d] \setminus S \cap \Gamma^c) = \\ &= m^*(\Gamma) + m^*([a, b] \setminus S) = (a - c) + (d - b) + m^*([a, b] \setminus S) = \\ &= (d - c) - (b - a) + m^*([a, b] \setminus S) \end{aligned}$$

טענה 2.6 תהי $S \subseteq \mathbb{R}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. S מדידה לבג.
 2. לכל $\varepsilon > 0$ יש $O \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $S \subseteq O$ וכן $m^*(O \setminus S) < \varepsilon$.
 3. לכל $\varepsilon > 0$ יש $F \subseteq \mathbb{R}$ סגורה עם $F \subseteq S$ וכן $m^*(S \setminus F) < \varepsilon$.
 4. יש קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $S \subseteq B$ וכן $m^*(B \setminus S) = 0$.
 5. יש קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ מסוג F_σ עם $A \subseteq S$ וכן $m^*(S \setminus A) = 0$ (וניתן לקחת גם איחוד של קבוצות סגורות וחסומות).
 6. לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$.
- אם $m^*(S) < \infty$, תנאים אלה שקולים גם לתנאי הבא:

7. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים קטעים חסומים I_1, \dots, I_n כך שמתקיים

$$m^* \left(S \Delta \left(\bigcup_{j=1}^n I_j \right) \right) < \varepsilon$$

אם S גם חסומה, אז תנאים אלה שקולים גם לתנאי הבא:

$$.8 \quad m_*(S) = m^*(S)$$

הוכחה: 1 \Rightarrow 2, 3 \Rightarrow 1: כי מידת לבג היא רגולרית.

2 \Rightarrow 4, 3 \Rightarrow 5: ראינו.

4, 5 \Rightarrow 1: כי כל קבוצת בורל היא מדידה לבג, וראינו כי $m^*(N) = 0$ אם ורק אם N

מדידה לבג וכן $m(N) = 0$.

1 \Leftrightarrow 6: ראינו.

עד כה, 1, 2, 3, 4, 5, 6, שקולים. כעת נוכיח כי תנאים אלה שקולים לתנאי 7.

7 \Rightarrow 1-6: נניח כי S מדידה לבג עם מידה סופית. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים N עבורו

$$m(S \setminus (-N, N)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

נסמן כעת

$$S_N = S \cap (-N, N)$$

קיימת $O \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $S_n \subseteq O$ כך שמתקיים

$$m(O \setminus S_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

בפרט $m(O) < \infty$. כעת, יש איחוד זר

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

כאשר כל I_j קטע פתוח (אולי ריק). לכן

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = m(O) < \infty$$

ולכן קיים j_0 כך שמתקיים

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} m(I_j) < \frac{\varepsilon}{3}$$

נסמן

$$I = \bigcup_{j=1}^{j_0-1} I_j$$

וניקח $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$. מתקיים

$$S\Delta I \subseteq (S \setminus (-N, N)) \cup (O \setminus S_N) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} I_j \right)$$

נבדוק זאת בעוד רגע, ואז ינבע כי $m(S\Delta I) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
נבדוק את ההכלה:

$$\begin{aligned} (I \setminus S) &\subseteq (I \setminus S_N) \subseteq (O \setminus S_N) \\ (S \setminus I) &\subseteq (S \setminus (-N, N)) \cup (S_N \setminus I) \subseteq (S \setminus (-N, N)) \cup (O \setminus I) = \\ &= \left(S \setminus (-N, N) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} I_j \right) \right) \end{aligned}$$

6 \Rightarrow 7: תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ עם $m^*(E) < \infty$. מספיק להראות כי

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$

יהי $\varepsilon > 0$. נקח I_1, \dots, I_m כמו שמובטח לנו מהתנאי בסעיף 7, ונסמן

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j$$

מתקיים

$$\begin{aligned} (E \cap S) &\subseteq (E \cap I) \cup (S \setminus I) \subseteq (E \cap I) \cup (S\Delta I) \\ (E \cap S^c) &\subseteq (E \cap I^c) \cup (S^c \setminus I^c) = (E \cap I^c) \cup (I \setminus S) \subseteq (E \cap I^c) \cup (S\Delta I) \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\begin{aligned} m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) &\leq m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c) + 2m^*(S\Delta I) = \\ &\stackrel{*}{=} m^*(E) + 2m^*(S\Delta I) < m^*(E) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

המעבר המסומן * נובע משום שהקבוצה I היא מדידה לבג, ולכן קרתאודורי (תנאי 6). משום שלקחנו $\varepsilon > 0$ שרירותי, נובע האי שוויון שרצינו להראות.

כעת נניח כי S חסומה, ונראה 8 \iff 1. אפשר להניח $S \subseteq (a, b)$ (על ידי הגדלת קטע סגור אם צריך), ואז

$$m_*(S) = (b - a) - m^*([a, b] \setminus S)$$

ראשית, אם S מדידה לבג, אזי

$$\begin{aligned} b - a &= m([a, b]) = m(S) + m([a, b] \setminus S) \\ m^*(S) &= m(S) = (b - a) - m([a, b] \setminus S) = m_*(S) \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך, נניח $m_*(S) = m^*(S)$. קיימות A, B מסוג G_δ עבורן

$$S \subseteq A, [a, b] \setminus S \subseteq B$$

וכן

$$m^*(S) = m(A), m^*([a, b] \setminus S) = m(B)$$

מאחר והנחנו $S \subseteq (a, b)$ ניתן להחליף את A בקבוצה $A \cap (a, b)$ ולהניח $A \subseteq (a, b)$ מתקיים

$$[a, b] = S \cup ([a, b] \setminus S) \subseteq A \cup B$$

כעת נקבל כי

$$\begin{aligned} m(A \setminus (A \cap B)) + m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B)) + m(A \cap B) &= m(A) + m(B) = \\ &= m^*(S) + m^*([a, b] \setminus S) = b - a = m([a, b]) \leq m(A \cup B) = m(A \setminus (A \cap B)) + \\ &+ m(B \setminus (A \cap B)) + m(A \cap B) \end{aligned}$$

כל המספרים הללו סופיים, ולכן נובע כי $m(A \cap B) = 0$, אבל

$$(A \setminus S) \subseteq (A \cap [a, b] \setminus S) \subseteq (A \cap B)$$

ולכן

$$m^*(A \setminus S) \leq m(A \cap B) = 0$$

■ מכאן $A \setminus S$ מדידה לבג וזניחה, ולבסוף $S = A \setminus (A \setminus S)$ מדידה לבג.

2.4 קבוצות לא מדידות לבג

טענה 2.7 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בעלת מידה חיזונית חיובית $m^*(A) > 0$. אזי A מכילה קבוצה שאינה מדידה לבג.

הוכחה: אפשר להניח כי A מדידה לבג (אחרת ניקח את A בעצמה). מרגולריות קיימת $K \subseteq A$ סגורה וחסומה עם $m(K) > 0$, כי ראינו שמידת A היא הסופרימום של המידות של הקבוצות הללו. לכן נוכל להניח כי K חסומה, נאמר $A \subseteq (-N, N)$. כעת נגדיר על A יחס שקילות:

$$x - y \in \mathbb{Q} \iff x \sim y$$

נקח מכל מחלקת שקילות איבר אחד, ונסמן $V \subseteq A$ את קבוצת הנציגים. זוהי הבנייה של ויטלי.

לכל $r \neq r'$ רציונאליים, הקבוצות $V + r, V + r'$ זרות, כי אם $x + r = y + r'$ כאשר $x, y \in V$ אזי בפרט $x - y = r' - r \in \mathbb{Q}$, לכן $x \sim y$, ומבניית V מתקיים $x = y$, כלומר $r = r'$ בסתירה.

נראה כי הקבוצה V אינה מדידה לבג בדרך השלילה. נניח כי V מדידה לבג. ראשית, יש איחוד זר

$$\bigcup_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} (V + r) \subseteq \bigcup_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subseteq (-N, N + 1)$$

לכן נקבל

$$\sum_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} m(V + r) \leq m(-N, N + 1) < \infty$$

אבל $m(V + r) = m(V)$ לכל r , וכן $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ היא בת מניה, ולכן נובע כי בהכרח $m(V) = 0$. מצד שני, לכל $z \in A$ יש $x \in V$ ו- $r \in \mathbb{Q}$ עבורו $z = x + r$. כלומר

$$A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (V + r)$$

ולכן

$$m(A) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}} m(V + r) = 0$$

■ וזו סתירה שכן $m(A) > 0$ לפי ההנחה.

2.5 קבוצת קנטור ופוקנצית קנטור

מתחילם מהקטע $[0, 1]$. בשלב $n = 1$, מסמנים קטע פתוח $J_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ונותרים שני קטעים סגורים $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$.

בשלב $n = 2$, מסמנים קטעים פתוחים $J_{2,1} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $J_{2,2} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, ונותרים ארבעה קטעים סגורים $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$. ממשיכים ככה. אחרי שלב n נותרים 2^n קטעים סגורים, ובשלב $n+1$ מורדים את קטעי האמצע שלהם, שמשומנים $J_{n+1,1}, \dots, J_{n+1,2^n}$. הקבוצה הנותרת היא חיתוך כל הקטעים הקבוצות הסגורות המתקבלות אחרי כל שלב. זוהי קבוצה סגורה בתוך $[0, 1]$ הנקראת קבוצת קנטור. בכל שלב, המידה אחרי השלב היא $\frac{2}{3}$ כפול המידה לפני השלב. לכן המידה של קבוצת קנטור היא 0. נסמן קבוצת קנטור בתור $\mathcal{C} \subseteq [0, 1]$: סגורה, $m(\mathcal{C}) = 0$. המשלים של קבוצת קנטור הוא קבוצה פתוחה:

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k} \right)$$

וכמובן $m(J) = 1$.

קצת נגדיר את פונקציית קנטור: בקטע $J_{n,k}$ נגדיר

$$\varphi = \frac{2k-1}{2^n}$$

לכן על $J_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ נקבל $\varphi = \frac{1}{2}$, על $J_{2,1}$ נקבל $\varphi = \frac{1}{4}$, על $J_{2,2}$ נקבל $\varphi = \frac{3}{4}$ וכן הלאה. בצורה זו נקבל פונקציה רציפה $\varphi : J \rightarrow [0, 1]$ מונוטונית עולה, ומקבל את כל הערכים מהצורה $0 < \frac{m}{2^n} < 1$ (כי אפשר להניח m אי זוגי). עבור $x \in \mathcal{C}$, $0 \neq x$, נגדיר $\varphi(x) = \sup \{ \varphi(t) \mid J \ni t < x \}$ ונגדיר $\varphi(0) = 0$ (נשים לב שההגדרה שהצגנו כאן טובה גם על J). אזי $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ מונוטונית עולה, ומקבל כל ערך מהצורה $0 < \frac{m}{2^n} < 1$, ולכן נובע כי אין לה קפיצות, ומכאן שהיא רציפה - כלומר בפרט על φ נקראת פונקציית קנטור.

2.6 קבוצה מדידה לבג שאינה בורל

בסימונים לעיל, נסמן $f(x) = \varphi(x) + x$ עבור $0 \leq x \leq 1$. נקבל $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ רציפה ומונוטונית עולה במובן החזק. נובע כי f חד-חד-ערכית, ולכן $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ רציפה, כלומר f היא הומיאומורפיזם. בפרט, f, f^{-1} מעבירות קבוצות בורל לקבוצות בורל. על כל קטע $J_{n,k}$ φ קבועה ולכן $f|_{J_{n,k}} = x + \text{const}$. מכאן נובע כי $f(J_{n,k})$ הוא קטע פתוח, וכן

$$m(f(J_{n,k})) = m(J_{n,k})$$

לכן

$$f(J) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} f(J_{n,k}) \right)$$

קבוצה פתוחה, עם

$$m(f(J)) = \sum_{m,k} m(J_{m,k}) = m(J) = 1$$

לכן $f(C) = [0, 2] \setminus f(J)$ קבוצת בורל, עם

$$m(f(C)) = 2 - m(f(J)) \geq 1$$

מכאן נובעת שקיימת $A \subseteq f(C)$ שאינה מדידה לבג, ובפרט A אינה בורל. מכאן נובע כי $f^{-1}(A)$ אינה בורל. אבל,

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(f(C)) = C$$

אבל $m(C) = 0$, כלומר $m(f^{-1}(A)) = 0$ ובפרט מדידה לבג, אך אינה מדידה בורל.