

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

8 במאי 2017

1 אינטגרציה על יריעות

בהינתן $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בעלת תומך קומפקטי, ומפה $r : U \rightarrow M$ המקיימת $\text{supp } f \subseteq r(U) \subseteq M$, מגדירים

$$\int_M f = \int_U (f \circ r) \sqrt{\Gamma(r_{u_1}, \dots, r_{u_k})} = \int_U (f \circ r) \sqrt{\det D_r^t D_r}$$

טענה 1.1 ההגדרה הזו לא תלויה בבחירת המפה r .

הוכחה: נבחר שתי מפות $r_i : U_i \rightarrow M$ עם

$$\text{supp}(f) \subseteq r_i(U_i) \subseteq M$$

נסמן

$$V = r_1(U_1) \cap r_2(U_2)$$

כעת V פתוחה ומקיימת

$$\text{supp}(f) \subseteq V \subseteq M$$

נסמן גם

$$U'_j = r_j^{-1}(V) \subseteq U_j$$

ראינו כי $\varphi = r_2^{-1} \circ r_1 : U'_1 \rightarrow U'_2$ היא דיפאומורפיזם. נגזור:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \circ \varphi \\ D_{r_1} &= D_{r_2} \cdot D_\varphi \end{aligned}$$

נחשב:

$$\begin{aligned} \int_{U_2} (f \circ r_2) \sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}} &= \int_{U_2'} (f \circ r_2) \sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}} = \int_{\varphi^{-1}(U_2')} (f \circ r_2 \circ \varphi) \sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}} \underbrace{|\det D_\varphi|}_{\sqrt{\det D_\varphi^t \det D_\varphi}} = \\ &= \int_{U_1'} (f \circ r_1) \sqrt{\det (D_\varphi^t D_{r_2}^t D_{r_2} D_\varphi)} = \int_{U_1'} (f \circ r_1) \sqrt{\det (D_{r_1}^t D_{r_1})} \end{aligned}$$

■

ולכן ההגדרה לא תלויה בבחירת המפה.

2 נוסחת קו-שטח (פוביני עקום)

הי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^1 , כך שלכל $x \in V$ מתקיים

$$\nabla \Phi(x) \neq 0$$

נסמן $\Phi(V) = (a, b)$. לכל $c \in (a, b)$ נגדיר

$$M_c = \{x \in V \mid \Phi(x) = c\}$$

משפט 2.1 אם $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם תומך קומפקטי בתוך V אזי

$$\int_V f = \int_a^b \left(\int_{M_c} \frac{f(x)}{|\nabla \Phi(x)|} dS(x) \right) dc$$

הערה 2.2 אם אין לפונקציה f תומך קומפקטי נשתמש בנוסחה עבור

$$f \cdot \mathbb{1}_{(a+\varepsilon, b-\varepsilon)}$$

וניקח גבול כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$.

דוגמא נסמן $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. ניקח

$$V = r \cdot B, r > 0$$

וכן

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= |x| \\ \nabla \Phi(x) &= \frac{x}{|x|} \\ |\nabla \Phi(x)| &= 1 \end{aligned}$$

לכן אם f אינטגרבילית רימן מתקיים (ונראה בתרגיל הבית בצורה אחרת):

$$\int_{rB} f = \int_0^r \left(\int_{\rho S^{n-1}} f(x) dS(x) \right) d\rho = \int_0^r \rho^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(\rho y) dy \right) d\rho$$

תרגיל חשבו את הנפח של $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$.

פתרון נקבע $0 < \varepsilon < r$. נשתמש בנוסחת הקורשטח עבור

$$f(x) = e^{-|x|^2} \cdot \mathbb{1}_{(\varepsilon, r)}(|x|)$$

מהנוסחה הקודמת:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\varepsilon}^r \rho^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(\rho y) dy \right) d\rho = \int_{\varepsilon}^r \rho^{n-1} e^{-\rho^2} d\rho \underbrace{\int_{S^{n-1}} dy}_{V(S^{n-1})}$$

לכן הנפח הוא

$$\begin{aligned} V(S^{n-1}) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f}{\int_{\varepsilon}^r \rho^{n-1} e^{-\rho^2} d\rho} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}}{\int_0^{\infty} \rho^{n-1} e^{-\rho^2} d\rho} = \\ &= \dots = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$