

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

22 בדצמבר 2016

ראינו את הדדיות פרובניוס בשיעור שעבר: בהינתן פונקציית מחלקות ψ על $H \leq G$ ופונקציית מחלקות φ על G , מתקיים

$$\langle \psi, \text{Res}\varphi \rangle_H = \langle \text{Ind}\psi, \varphi \rangle_G$$

הערה 0.1 אותה הוכחה מראה גם כי

$$(\psi, \text{Res}\varphi)_H = (\text{Ind}\psi, \varphi)_G$$

הערה 0.2 נוסחה שימושית:

$$\text{Ind}(\psi \cdot \text{Res}\varphi) = (\text{Ind}\psi) \cdot \varphi$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\psi \cdot \text{Res}\varphi)(s) &= \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi(t^{-1}st) \cdot \varphi(t^{-1}st) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi(t^{-1}st) \varphi(s) \\ &= \frac{1}{h} \left(\sum_{\substack{s \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi(t^{-1}st) \right) \varphi(s) = (\text{Ind}\psi \cdot \varphi)(s) \end{aligned}$$

■

הערה 0.3 ראינו בעבר כי

$$(\text{Ind}W) \otimes E = \text{Ind}(W \otimes \text{Res}E)$$

ומכאן נקבל

$$\text{Ind} \chi_W \cdot \chi_E = \text{Ind} (\chi_W \cdot \text{Res} \chi_E)$$

ולכן הנוסחה הקודמת נובעת עבור כרקטרים, אבל כל פונקציית מחלקה היא צירוף לינארי של כרקטרים, ולכן הנוסחה נכונה לכל פונקציות המחלקה.

טענה 0.4 תהי W הצגה אי פריקה של W , E הצגה אי פריקה של G . מספר המופעים של W בצמצום $\text{Res} E$ שווה למספר המופעים של E בהשראה $\text{Ind} W$.

הוכחה: נובע מתוך הדדיות פרובניוס עבור $\psi = \chi_W, \varphi = \chi_E$. ■

1 צמצום

יהיו $H, K \subseteq G$ שתי תת-חבורות, $\rho: H \rightarrow GL(W)$ הצגה של H . נסמן $V = \text{Ind}_H^G(W)$ ונרצה לדעת מהו $\text{Res}_K(V)$. נתבונן בקבוצת הקוסטים הכפולים $K \backslash G / H$. נבחר קבוצת נציגים S לקוסטים הללו. לכל $s \in S$ נגדיר

$$H_s = sHs^{-1} \cap K$$

$H_s \leq K$ תת חבורה, ונגדיר

$$\rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs) \in GL(W)$$

כאשר $x \in H_s \subseteq H$. זוהי הצגה של H_s במרחב W_s . כעת נוכל לקבל את ההשראה $\text{Ind}_{H_s}^K \rho^s$, שהיא הצגה של K .

1.1 טענה

$$\text{Res}_K \left(\text{Ind}_H^G W \right) = \bigoplus_{s \in S} \text{Ind}_{H_s}^K W_s$$

הוכחה: ראינו בעבר כי

$$V = \text{Ind}_H^G W = \bigoplus_{x \in G/H} xW$$

כאשר הכוונה היא לנציגים של מחלקות השקילות. יהי $s \in S$. נגדיר $V(s)$ את תת המרחב של V שנוצא על ידי xW , כאשר $x \in KsH$. נגדיר גם

$$T_s = \{xH \mid x \in KsH\}$$

כעת,

$$KsH/H \subseteq G/H$$

נגדיר קבוצת נציגים R_s של T_s בתוך KsH/H . $R_s \subseteq G/H$, ואז

$$T_s = \{rH \mid r \in R_s\}$$

אזי

$$V(s) = \bigoplus_{r \in R_s} rW$$

כמובן מתקיים

$$V = \bigoplus_{s \in S} V(s)$$

והכל משום שאלה הצגות מושרות. כעת, מההגדרה, $V(s)$ שמור תחת K , ולכן $V(s)$ הוא הצגה של K . נרצה להראות כי $V(s)$ K -איזומורפי להצגה $\text{Ind}_{H_s}^K W_s$. נחשב את תת החבורה של K שאיברים $\{x \in K \mid xsW = sW\}$.

$$xsW = sW \iff s^{-1}xsW = Ws \iff s^{-1}xs \in H$$

אבל $x \in K$, ולכן $x \in sHs^{-1} \cap K = H_s$. מכאן, המרחב $V(s)$ הוא סכום יש של תת מרחבים xsW עבור $x \in K/H_s$, ולכן

$$V(s) = \text{Ind}_{H_s}^K W_s$$

■

לכן נסיים.

1.2 הערה $V(s)$ תלוי אך ורק בתמונה של s בתוך $K \setminus G/H$, וכך גם $\text{Ind}_{H_s}^K (W_s)$.

1.1 קריטריון אי הפריקות של מקי

ניקח במצב הקודם $K = H$. אזי

$$H_s = sHs^{-1} \cap H$$

ההצגה ρ היא של H במרחב W , ומגדירה $\text{Res}_s(\rho) = \rho|_{H_s}$. זו לא ρ^s .

1.3 הגדרה שתי הצגות V_1, V_2 של חבורה K הן זרות אם $\langle V_1, V_2 \rangle_K = 0$.

טענה 1.4 (קריטריון מקי) תהי (W, ρ) הצגה של תת חבורה H . נגדיר

$$V = \text{Ind}_H^G W$$

אזי ρ^s אי פריקה אם ורק אם W אי פריקה, וכן לכל $s \in G \setminus H$, שתי ההצגות ρ^s , $\text{Res}_s(\rho)$ של H_s הן זרות.

הוכחה: ידוע כי V אי פריקה אם ורק אם $\langle V, V \rangle_G = 1$. לפי פרובניוס,

$$\langle V, V \rangle_G = \langle \text{Ind} W, V \rangle_G = \langle W, \text{Res}_H V \rangle_H$$

לפי טענה קודמת,

$$\text{Res}_H V = \text{Res}_H \left(\text{Ind}_H^G W \right) = \bigoplus_{s \in H \setminus G / H} \text{Ind}_{H_s}^H (\rho^s)$$

מקבלים

$$\langle W, \text{Res}_H V \rangle_H = \left\langle W, \bigoplus_{s \in H \setminus G / H} \text{Ind}_{H_s}^H (\rho^s) \right\rangle_H = \sum_{s \in H \setminus G / H} \langle W, \text{Ind}_{H_s}^H \rho^s \rangle_H$$

מפרובניוס, השוויון ממשיך:

$$\sum_{s \in H \setminus G / H} \langle W, \text{Ind}_{H_s}^H \rho^s \rangle_H = \sum_s \langle \text{Res}_{H_s} W, \rho^s \rangle_{H_s} = \sum_s \langle \text{Res}_s(\rho), \rho^s \rangle$$

נסמן $d_s = \langle \text{Res}_s(\rho), \rho^s \rangle$. עבור $s = 1$, נקבל

$$d_1 = \langle \rho, \rho \rangle_H \geq 1$$

עבור $s \neq 1$ מקבלים $d_s \geq 0$. לכן

$$\sum_{s \in H \setminus G / H} d_s = 1$$

אם ורק אם ρ אכן אי פריקה, וכך $d_1 = 1$, ולכל $s \neq 1$ נקבל $d_s = 0$ כי ההצגות זרות. ■

מסקנה 1.5 נניח כי H תת חבורה נורמלית של G . אזי $\text{Ind}_H^G \rho$ אי פריקה אם ורק אם ρ אי פריקה, והיא לא איזומורפית להצגה הצמודה ρ^s לאף $s \notin H$.

הוכחה: $s^{-1} H s = H$, כלומר $H_s = H$. לכן $\text{Res}_s \rho = \rho$. הצגה זו וגם ρ^s אי פריקות, ולכן זרות, כלומר לא איזומורפיות. ■

2 דוגמאות של הצגות מושרות

2.1 תת חבורות נורמליות

טענה 2.1 תהי A תת חבורה נורמלית של G , ותהי $\rho : G \rightarrow GL(V)$ הצגה אי פריקה. אזי אחד מהבאים נכון:

1. קיימת תת חבורה $A \subseteq H \subsetneq G$ והצגה אי פריקה σ של H כך שההצגה ρ מושרית על ידי σ .

2. הצמצום של ρ על A הוא איזוטיפי (כלומר, סכום ישר של עותקים איזומורפיים של אותה הצגה אי פריקה).

הוכחה: נכתוב

$$V = \bigoplus_i V_i$$

הפירוק הקנוני של $\rho|_A$ להצגות איזוטיפיות. כעת, יהי $s \in G$, ותהי (W, θ) הצגה של A . נגדיר הצגה חדשה

$$\begin{aligned} s * \theta &: A \rightarrow GL(W) \\ (s * \theta)(t) &= \theta(s^{-1}ts) \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$s * (s' * \theta) = (ss') * \theta$$

אם $V_i = \bigoplus \theta$, נכתוב $V_i = V_\theta$. כעת,

$$\rho(s) V_\theta = s * \left(\bigoplus \theta \right) = \bigoplus (s * \theta) = V_{s*\theta}$$

נטען כי G מתמירה את תת המרחבים V_i . ניקח הצגה η של A בתוך V_i . אזי

$$\eta = \theta \oplus \dots \oplus \theta$$

ואז V_θ רכיב איזוטיפי של η . יהי $s \in G$. נסתכל על $\rho(s) V_\theta$. כיצד A פועלת עליו (והאם)? יהי $t \in A$, ויהי $x \in V_\theta$. אזי

$$\rho(t) \rho(s) x = \rho(s) \rho(s^{-1}ts) x = \rho(s) \eta(s^{-1}ts) x$$

כמובן $s^{-1}ts \in A$, ולכן $\rho(s^{-1}ts) = \eta(s^{-1}ts)$.

$$\rho(s)^{-1} \eta(t) \rho(s) = \rho(s^{-1}ts) = \eta(s^{-1}ts) = (s * \eta)(t)$$

ההצגה של A בתוך V_θ היא איזומורפית להצגה $s * \eta$, וכן

$$s * \eta = s * \left(\bigoplus \theta \right) = \bigoplus (s * \theta)$$

ולכן מתקיים

$$\rho_s V_\theta = V_{s*\theta}$$

■

לכן $\rho(s)$ מתמירה את תת המרכבים V_θ .