

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 הצגות מושרות

תהייה $H \leq G$ סופיות, W הצגה של H מעל \mathbb{C} . נגדיר

$$V = \text{Ind}_H^G W = \{f : G \rightarrow W \mid \forall g \in G, h \in H \ f(gh) = hf(g)\}$$

הערך בנקודה כלשהי בקוסט כלשהו של H קובע את כל שאר הערכים בקוסט, ולכן אלה כמעט פונקציות מהמנה אל W . כמובן

$$V \cong W^{[G:H]} \\ \dim V = [G : H] \dim W$$

זהו מרחב ווקטורי מעל \mathbb{C} , כמובן. קעת נוכל להגדיר

$$(gf)(x) = f(xg)$$

לכל $g \in G, f \in V, x \in G$. נבדוק שזו הצגה:

$$(gf)(ht) = f(htg) = hf(tg) = h(gf)(t)$$

לכן $gf \in V$. קל מאוד לבדוק שהפעולה לינארית. נשאר רק לשים לב כי

$$((gh)f)(x) = f(xgh) = (hf)(xg) = (g(hf))(x)$$

ולכן זו אכן הצגה. יש הומומורפיזמים של הצגות של H בין V, W בשני הכיוונים: ראשית $i : W \rightarrow V$ ששולחת את $w \in W$ לפונקציה ששולחת את 1 אל w , וכל $g \notin H$ לאפס. לא מסובך לבדוק שזו העתקה לינארית, ושהיא הומומורפיזם של הצגות של H . בכיוון השני, על ידי $j : V \rightarrow W$ נתאים בין פונקציה f לערך שלה על 1. שוב לא מסובך להשתכנע שזה הומומורפיזם:

$$j(hf) = (hf)(1) = f(1 \cdot h) = f(h) = hf(1) = hj(f)$$

פשוט לראות את i כשיכון, ואז אפשר לכתוב

$$V = \bigoplus_{g \in G/H} gW$$

וזה כבר מזדהה עם ההגדרה מהכיתה להצגה מושרית. דרך נוספת להגדיר: הדדיות פרובניוס.

$$\text{Hom}_H(\sigma, \text{Res} \rho) \cong \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \sigma, \rho)$$

הצגה של H , ρ הצגה של G . במונחי קטגוריות - הפונקטור של השראה צמוד מימין ומשמאל לפונקטור של צמצום, בקטגוריית ההצגות של חבורות סופיות מעל \mathbb{C} . יהי $\alpha: \text{Ind}_H^G \sigma \rightarrow \rho$ נספק $\beta: \sigma \rightarrow \rho$. נגדיר

$$\beta = \alpha \circ i$$

קל יחסית לבדוק שזה איזומורפיזם לינארי, לא נעשה את זה כרגע.

דוגמה השראת ההצגה הטרייויאלית מכל תת חבורה יוצרת את הצגת התמורות של פעולת G על המנה. בפרט, עבור $H = 1$, מקבלים את ההצגה הרגולרית של G .

כעת אם χ היא הכרקטר של W , אז הכרקטר ψ של ההצגה המושרית הוא

$$\psi(g) = \sum_{x \in G/H} \hat{\chi}(x^{-1}gx)$$

כאשר

$$\hat{\chi}(t) = \begin{cases} \chi(t) & t \in H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

דרך נוספת להגדיר את ההצגה המושרית:

$$V \cong \mathbb{C}[G \setminus H] \otimes W$$

כאשר G פועלת על W טרייויאלית. נגדיר העתקה בי לינארית:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G \setminus H] \times W &\rightarrow V \\ \left(\sum \lambda_i H a_i, w \right) &\mapsto f(a_i) = \lambda_i w \end{aligned}$$

ברור שזו העתקה בי לינארית, ולכן מהתכונה האוניברסלית של מכפלה טנזורית, יש העתקה לינארית

$$\tau: \mathbb{C}[H \setminus G] \otimes W \rightarrow V$$

נרצה להראות כי $\tau \in \text{Hom}_G(\mathbb{C}[H \backslash G] \otimes W, V)$.

$$\begin{aligned}\tau\left(g\left(\sum \lambda_i H a_i \otimes w\right)\right) &= \tau\left(\sum \lambda_i H a_i g \otimes w\right) = (f(a_i, g) = \lambda_i w) \\ g\tau\left(\sum \lambda_i H a_i \otimes w\right) &= (f(a_i g) = \lambda_i w)\end{aligned}$$

שתי אלה הן פונקציות שמתנהגות באותה צורה. משום שיש שוויון מימדים נותר רק להראות חד־חד־ערכיות או על. נראה על. אם

$$f(H a_i) = w_i$$

אזי מתקיים

$$\tau\left(\sum H a_i \otimes w_i\right) = f$$

מההגדרה.