22/10/18

הרצאה מס' 3 - טופולוגיה

תזכורת - הגדרנו מטריקות, כו' ב-$\mathbb{R}^2$ $1\le p<\infty$ $\rho_p(x,y)=(|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p)^{1/p}$

$\rho_\infty(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$

והטענה היא שלכל p,q $\rho_p\sim\rho_q$

הוכחה - (שים ♡) כי לכל p $\rho_p(x,y)\ge\rho_\infty(x,y)$ ולמטענה קודמת (נקבל) $\Omega_{\rho_\infty}\subset\Omega_{\rho_\infty}$.

כמו כן, $\rho_p(x,y)=(|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p)^{1/p}\le(2\rho_\infty^p(x,y))^{1/p}$

$\Rightarrow$ $\rho_p(x,y)\le 2^{1/p}\rho_\infty(x,y)$ ושוב מטענה קודמת $\Omega_{\rho_p}\subset\Omega_{\rho_\infty}$

• תרגיל: הראו כי אם (X,ρ) מרחב מטרי $\rho_1=\sqrt{\rho}$ אז $\rho_1\sim\rho$.

ואמור $\rho_2=\min\{\rho,1\}$ (נקבל) $\rho_2\sim\rho$.

• תרגיל: (נסמן) מהקבוצה $L=\{(x_1,\dots,x_n,\dots)\mid\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$ ונגדיר $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$ מוגדרת על L. הוכח: אם $q<p$ אז $\Omega_{\rho_p}\subsetneq\Omega_{\rho_q}$ כלומר, המטריקות לא שקולות.

הגדרה - (X,ρ), $A\subset X$ פתוחה אמ"מ לכל $x\in A$ קיים $\varepsilon>0$ כך, ש-$B_\varepsilon(x)\subset A$.

הגדרה - אם (X,Ω) מרחב טופולוגי (קרא מטריזבילי) אם קיימת מטריקה ρ כך, ש-$\Omega=\Omega_\rho$.

דוגמאות - (1) טופולוגיה ב- $\mathbb{R},\mathbb{R}^n$ הרגילה עם המטריקה הסטנדרטית $(\mathbb{R},|\cdot|)$

(2) טופולוגיה דיסקרטית $\{X,2^X\}$, $\Omega=2^X$ איזה מטריקה ניקח?

$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$ המטריקה הדיסקרטית.

(3) (תרגיל) $|X|<\infty$ (X,Ω) מטריזבילית אמ"מ $\Omega=2^X$.

(4) (תרגיל) $|X|=\infty$ Ω קו סופית (קבוצה סגורה אמ"מ זה X עצמו או סופית) להוכיח שמרחב זה לא מטריזבילי.

תת מרחב טופולוגי

הגדרה (טענה) (X,Ω) מרחב טופולוגי $A\subset X$ (נגדיר $\Omega_A=\{A\cap V: V\in\Omega\}$) Ω_A טופולוגיה על A ו- (A,Ω_A) וזה נקרא תת מרחב טופולוגי של (X,Ω)

הוכחה - (1), (2) של הגדרת טופולוגיה טריויאלי כי $\phi=A\cap\phi$ $A=A\cap X$

• אם $U_1, U_2 \in \Omega_A$ קיימות $V_1, V_2 \in \Omega$ כך ש- $U_1 = A \cap V_1$, $U_2 = A \cap V_2$ ואז

$$U_1 \cap U_2 = A \cap V_1 \cap A \cap V_2 = A \cap \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\in \Omega} \in \Omega_A$$

• יהי אוסף קבוצות $U_\alpha \in \Omega_A$ צ"ל קיימות $V_\alpha \in \Omega$ כך ש- $U_\alpha = A \cap V_\alpha$

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap A) = A \cap \underbrace{(\bigcup_\alpha V_\alpha)}_{\in \Omega} \in \Omega_\alpha$$

<u>טענה</u>- אם β בסיס של Ω אז $\beta_A = \{A \cap V : V \in \beta\}$ בסיס של Ω_A.

<u>הוכחה</u>- ברור שאיחוד של β_A מכסה את A. צ"ל, $\bigcup_{U \in \beta_A} U = A$.

מספיק להוכיח שכל קבוצה פתוחה (נגיד U) קבוצות מבסיס.

יהי $U \in \Omega_A$ כלומר קיים $V \in \Omega$ כך ש- $U = A \cap V$. β בסיס של Ω

ואז $V = \bigcup_{\substack{W \in \beta \\ W \subset V}} W$ (לפי הגדרה של בסיס) ואז לגבי U נקבל-

$$U = A \cap \left(\bigcup_{\substack{W \in \beta \\ W \subset V}} W\right) = \bigcup_{\substack{W \in \beta \\ W \subset V}} \underbrace{(A \cap W)}_{\in \beta_A}, W \subset U$$

מספיק לבחור איחוד של איזשהן קבוצות מתוך בסיס זה ולכן זה מספיק.

1. אם A פתוחה אז $U \in \Omega_A$ אמ"מ $U \subset A$ ו- U פתוחה ב- X (שיטה טופולוגית)
2. אם A סגורה, אז $W \subset A$ סגורה בטופולוגיה המושרית A אמ"מ היא סגורה ב- X.

<u>דוגמה</u>- $\mathbb{R}$, $A = [0,1)$ קבוצות פתוחות ממינים שלא נמצא בהם אם מדבר כאן קבוצה פתוחה רגילות.